

Luftflödet förbi en trottel
LiTH-ISY-EX-3068

Examensarbete utfört i Fordonssystem
vid Tekniska Högskolan i Linköping
av

Mattias Krylander

Reg nr: LiTH-ISY-EX-3068

Luftflödet förbi en trottel
LiTH-ISY-EX-3068

Examensarbete utfört i Fordonssystem
vid Tekniska Högskolan i Linköping
av


Mattias Krysander

Reg nr: LiTH-ISY-EX-3068

Handledare: **Lars Nielsen**

Examinator: **Lars Nielsen**

Linköping, 24 november 2000.

	Avdelning, Institution Division, Department Fordonssystem Dept. of Electrical Engineering		Datum: Date: 2000-11-09
	Språk Language <input checked="" type="checkbox"/> Svenska/Swedish <input type="checkbox"/> Engelska/English <input type="checkbox"/> _____	Rapporttyp Report category <input type="checkbox"/> Licentiatavhandling <input checked="" type="checkbox"/> Examensarbete <input type="checkbox"/> C-uppsats <input type="checkbox"/> D-uppsats <input type="checkbox"/> Övrig rapport <input type="checkbox"/> _____	ISBN _____ ISRN _____ Serietitel och serienummer ISSN Title of series, numbering _____ LiTH-ISY-EX-3068
URL för elektronisk version http://www.fs.isy.liu.se/			
Titel: Luftflödet förbi en trotteln Title: Airflow past a throttle plate Författare: Mattias Krylander Author:			
Sammanfattning Abstract <p>Sambandet mellan tryckfallet över trotteln och massflödet förbi trotteln är intressant för förståelse av lufttillförseln till en motor. Massflödet förbi trotteln beräknas idag ofta genom att använda en formel utanför dess användningsområde. För att formeln ska stämma har en ofysikalisk koefficient multiplicerats till uttrycket. Koefficienten är inte konstant.</p> <p>Simuleringar och mätningar ger grunden för vilka fysikaliska fenomen som förklarar koefficienten. Massflödet är beräknat för öppningsvinklar upp till cirka 40°, under antagande att flödet varit kompressibelt och stationärt.</p> <p>Slutsatserna är att flödet vid trotteln är turbulent och inte kan approximeras som inkompressibelt flöde i normala motorförhållanden. Tryckförlusten över trotteln beror till störst del på att flödet måste passera en areaökning. Flödet bildar en stråle från öppningen mellan trotteln och röret. Strålen avsmalnar efter öppningen. Den smalaste delen av strålen kallas för kontraktionen av strålen. Summan av tvärsnittsareorna i kontraktionen är den minsta area som allt flöde passerar igenom. Areaökningen beräknas som kvoten mellan summan av areorna i kontraktionerna och rörets tvärsnittsarea i utloppet. Kontraktion med hänsyn tagen till fluidens viskositet beräknas genom, ett från simuleringar anpassat uttryck som beror på vinkelskillnaden mellan fluidens flödesriktning in mot begränsningen och fluidens flödesriktning i kontraktionen. Sambandet mellan tryckfallet över trotteln och massflödet förbi trotteln beror på tvärsnittsarean av kontraktionen och hastigheten i kontraktionen. Hastigheten beror på tryckkvoten mellan det statiska trycket i kontraktionen och totaltrycket i kontraktionen. Totaltrycket i kontraktionen kan approximeras med totaltrycket strax före trotteln. Det statiska trycket beräknas av kända tryck och förlustkoefficient.</p>			
Nyckelord Keywords trotteln, kontraktion, tryckfall, kompressibel fluid			

Abstract

The relationship between the pressure loss and air mass flow past the throttle is interesting to understand. Today the mass flow is calculated by using a formula out of its range. It is necessary to multiply a correction factor to get a good result. This factor is not a constant.

Simulations and measurements are used to explain the correction factor. The air mass flow is calculated for throttle plate angles up to 40° . The flow is supposed to be compressible and stationary.

The conclusions are that the flow is turbulent and compressible in normal engine conditions. The main pressure loss depends on expansion of the cross-section. The throttle plate generates a jet. The minimum cross-section of the jet is called the vena contracta. The smallest area which all flow goes through is the area of the sum of the two vena contracta. The cross-section expansion is calculated as the ratio between the area of the vena contracta and the cross-section area of the pipe. The contraction of viscous flow is calculated with an approximated expression based on the simulations. The expression depends on the angle between the flow direction just before the throttle and the flow direction in the vena contracta. The connection between the pressure loss and air mass flow past the throttle depends on the area of the vena contracta and the velocity in the vena contracta. The velocity depends on the static pressure in the vena contracta divided by the total pressure in the vena contracta. The total pressure is approximated with the total pressure just before the throttle. The static pressure is calculated with known pressures and the loss coefficient.

Förord

Examensarbetet är utfört på Fordonssystem vid Linköpings Universitet. Jag vill tacka Lars Eriksson och Lars Nielsen för det engagemang och stöd de givit mig. Andra på institutionen, som jag vill framföra mitt tack till, är Per Andersson, som bland annat hjälpt mig i labbet och Erik Frisk, som sett till att ordbehandlingsprogrammet Latex fungerat som jag önskat.

Speciellt vill jag tacka min mor, Gunilla Krysanter, som korrekturläst rapporten och givit många intressanta synpunkter.

Till slut vill jag också tacka min familj, samtliga på fordonssystem och Åsa Tobiasson för att ha bidragit till att skapa ett gott arbetsklimat.

Innehåll

1	Inledning	1
2	Studier av en tvådimensionell trotteln	3
2.1	Huvudekvationer för inkompressibel strömning	3
2.2	Simulering	3
2.2.1	Initialvillkor	4
2.2.2	Intressanta storheter	4
2.2.3	Problemets konstanter	4
2.2.4	Problemets variabler	5
2.3	Laminärt eller turbulent flöde i inloppet till trotteln?	5
2.3.1	Approximativ beräkning av turbulens i rör	5
2.3.2	Approximativ beräkning av turbulens mellan två plana plattor	6
2.4	Ansatt hastighetsprofil i inloppet	6
2.5	Vad beror tryckförlusten på?	6
2.5.1	Friktionsförluster	6
2.5.2	Engångsförluster	7
2.6	Tryckförlust i ett parallellkopplat system	7
2.7	Är det tillräckligt att betrakta tryckförlusten enbart för areaökningen?	8
2.8	Kan areaminskning och areaökning förklara massflödet?	9
2.9	Hur kan andelen massflöde under trotteln beräknas?	11
2.9.1	Antaganden	11
2.9.2	Metod	11
2.9.3	Utredning	11
2.10	Vilket förhållande råder mellan hastigheterna i kontraktionerna? . .	12

2.10.1	Beräkning av medelhastigheten i kontraktionen	12
2.10.2	Beräkning av maxhastigheten i kontraktionen	13
2.11	Hur beräknas tryckförlusten?	13
2.12	Vad återstår att beräkna?	13
2.13	Beräkning av arean i två dimensioner	13
2.14	Vad beror kontraktionskoefficienten huvudsakligen av?	15
2.15	Den ideala kontraktionskoefficientens beroende av γ	15
2.15.1	Bakgrund	16
2.15.2	Metoden	17
2.15.3	Randvillkor	17
2.15.4	Geometrin	18
2.15.5	Den komplexa hastighetspotentialen $F(\zeta)$	18
2.15.6	Transformering av F från ζ -planet till z -planet	19
2.15.7	Beräkning av $z(\zeta = U_c)$	20
2.15.8	Resultat	21
2.16	Hur beror kontraktionskoefficienten av γ ?	22
2.16.1	Skillnader mellan beräknad och simulerad kontraktion	22
2.16.2	Simulerade hastighetsprofiler	23
2.16.3	Kontraktion med friktion	24
2.17	Samband mellan öppningsvinkel β och ändringsvinkel γ	27
2.17.1	Översidan	27
2.17.2	Undersidan	28
2.17.3	Vilket är sambandet mellan α_u och β	28
2.18	Utvärdering av 2D-modellen	29
2.18.1	Modellens definitionsområde	29
2.18.2	Simuleringens definitionsområde	31
2.18.3	Jämförelse av modell och simulering	31
2.19	Slutsatser	33
3	Studier av 3D-fallet	35
3.1	Huvudekvationer för kompressibla fluider	35
3.1.1	Antaganden	36
3.1.2	Härledning av Bernoulli's ekvation för kompressibla fluider	36
3.1.3	Härledning av den första ekvation (3.1)	37
3.1.4	Härledning av den andra ekvationen (3.2)	38
3.2	Areaberäkning i 3D	38
3.2.1	Metod	38
3.2.2	Uttrycket för trottelkanten	39
3.2.3	Beräkning av ett ytelement A	41
3.2.4	Indelning	43
3.2.5	Approximation av delytan i 's area	44
3.2.6	Den totala arean	44
3.3	Samband mellan öppningsvinkel β och vinkelskillnaden γ	44
3.3.1	Flödesriktning före trotteln	44
3.3.2	Normalen till tvärsnittsytan i kontraktionen	45

3.3.3	Avlänkingsvinkeln under trottekn	48
3.4	Beräkning av den kompressibla korrektionskoefficienten	53
3.4.1	Antagande	53
3.4.2	Metod	54
3.4.3	Lamb's form av Euler's ekvation	55
3.4.4	Beräkning av Bernoulli's ekvation	55
3.4.5	Chaplygin's ekvation	56
3.4.6	Exakt lösning av Chaplygin's ekvationer för $M < 1$	58
3.4.7	Randvärdesproblem	58
3.4.8	Jämförelse med inkompressibel lösning	59
3.4.9	Beräkning av kontraktionskoefficienten	60
3.4.10	Jämförelse mellan den beräknade kontraktionskoefficienten och korrektionskoefficienten	62
3.5	Grundekvationerna för en delyta i	63
3.6	Hastigheten i kontraktionen	64
3.7	Andel flöde genom delyta i	64
3.8	Ekvationerna för ett diskritiserat problem	65
3.9	Beräkning av massflödet som funktion av tryckdifferensen	65
3.9.1	Beräkna tryckkvoten i kontraktionen, $\frac{p}{p_t}$	66
3.9.2	Beräkning av massflödet	67
4	Utvärdering av 3D-modellen	69
4.1	Modellens definitionsområde	69
4.1.1	A:s begränsning	69
4.1.2	α :s begränsning	69
4.1.3	C:s begränsning	70
4.1.4	A_c :s begränsning	70
4.2	Jämförelse mellan olika tvärsnittsareor	71
4.3	Mätningar på motorn	71
4.3.1	Problemets geometriska konstanter	71
4.3.2	Problemets variabler	74
4.3.3	Korrektion av totaltrycket före trottekn	74
4.4	Fasplanet ($\beta, \frac{p_c}{p_t}$)	75
4.4.1	Intressanta händelser	75
4.5	Jämförelse mellan beräknat och mätt massflöde	76
4.6	Förklaringar till avvikelser	78
4.7	Algoritmbeskrivning	78
4.8	Obesvarade frågor som uppkommit under arbetets gång.	81
5	Slutsatser	85
A	Appendix	89

Figurer

2.1	Geometrin som simuleringar och beräkningar i det tvådimensionella fallet bygger på.	4
2.2	Geometri och beteckningar för beräkningar rörande areaökning. . . .	8
2.3	Här visas hur det dynamiska trycket delas upp i en ren tryckförlust, nytt dynamiskt tryck och statisk tryckökning. Dessa förhållanden är plottade mot kvoten A_{in}/A_{ut} . När kvoten är noll, vilket innebär att utströmning sker i en oändligt bred behållare, kommer allt dynamiskt tryck att gå förlorat. I andra extremfallet kommer kvoten att vara ett, vilket innebär att det inte finns någon areaförändring. I detta fall kommer givetvis inget att förändras utan allt dynamiskt tryck kommer att bestå. Det kan också nämnas att högst hälften av det dynamiska trycket kan omvandlas till statiskt tryck vid en direkt areaökning.	9
2.4	Punkterna visar andelen av flödet, som tar den undre vägen uttryckt i procent. Simuleringen är utförd, då högsta inflödeshatighet är 1m/s. Punkten vid 8 grader är osäker pga att simuleringen konvergerat. . .	10
2.5	Geometri och beteckningar för beräkningar rörande areaminskning. .	10
2.6	Principiell geometri som beräkningarna i det tvådimensionella fallet bygger på.	11
2.7	Sambandet mellan variablerna i problemet.	14
2.8	Skiss av trotteln. Figuren visar införda beteckningar vid beräkning av arean.	14

2.9	Visar kontraktionskoefficienten i en areaminskning med rät vinkel. Främst kommer vinklar mindre än 60° att studeras. 60° motsvarar en areakvot på en halv. Det intressanta i figuren är att kontraktionen inte är speciellt beroende av areakvoten då areakvoten är under 0.5.	16
2.10	I den vänstra figuren ses geometrin där Laplace ekvation ska lösas. I den högra ses tillhörande hodograf	18
2.11	Ett fjärdegradspolynom är anpassat till de teoretiskt beräknade punkterna	22
2.12	Hastighetsprofiler för simulering, där största hastigheten i inloppet valts till 1 m/s. Den vänstra profilen är snittet genom röret vid $x=-0.01$. Alla koordinater i figuren är relaterade till koordinaterna i figur (2.13). Den högra profilen ligger efter den övre öppningen på den x-koordinat där strömningen är i huvudsak parallell. Trottekn öppnad 60°	23
2.13	Resultat av simulering vid $\beta = 60^\circ$. Gråskalan symboliserar totaltrycket. Det är tydligt att den stora tryckförlusten sker vid areaökningen. Pilarna markerar fluidens hastighet och linjerna är strömlinjer.	24
2.14	Hastighetsprofiler för simulering där största hastigheten i inloppet valts till 1 m/s. Den vänstra profilen visar snittet genom röret vid $x=-0.01$. Den högra profilen ligger efter den övre öppningen på den x-koordinat där strömningen är i huvudsak parallell. Trottekn öppnad 35°	25
2.15	Grafen visar kontraktionskoefficientens, α :s, beroende av ändringsvinkel γ . Kryssen markerar uppmätta kontraktioner i simuleringar. Det heldragna polynomet är anpassat efter samtliga punkter medan den sträckade endast anpassats till punkterna för ändringsvinklar mindre än 90°	26
2.16	Kontraktionsmodell. Antag att det finns ett gränsskikt som påverkas av friktion vid väggarna.	27
2.17	Grafen visar hur kontraktionskoefficienten α beror av öppningsvinkeln β . Heldragen linje visar bakkanten av undersidan på trottekn. Den streckade grafen representerar framkanten på undersidan och den prickade slutligen är överkanten på trottekn.	29
2.18	Den vertikala linjen markerar när arean vid axeln är lika stor som arean vid trotteknkanten. Eftersom modellen inte tar hänsyn till kontraktion över axeln kommer de beräknade värdena att avvika från simuleringen redan för mindre vinklar, runt 50° . Gränsövergången till turbulent flöde representeras av den horisontella linjen, som ser ut att sammanfalla med x-axeln. Slutsatsen man kan dra är att man ytterst sällan kan använda en laminär modell.	30
2.19	Grafen representerar modellens värde. Kryssen är de simulerade värdena. För $\beta = 8^\circ$ är det troligt att avvikelserna beror på att simuleringen inte konvergerat.	31

2.20	Grafen representerar modellens värde. Kryssen är de simulerade värdena. För $\beta = 8^\circ$ är det troligt att avvikelsen beror på att simuleringen inte konvergerat.	32
2.21	Visar simulerade och beräknade tryckförluster. Avvikelsen vid 8° är större än vad den ser ut att vara med logaritmisk axel. Denna avvikelse beror förmodligen på att simuleringen inte konvergerat. Vid vinklar över 50° beror avvikelsen framförallt på att axeln inte är modellerad.	33
3.1	Visar trotteln och axeln trotteln sitter på. Röret som trotteln sitter monterad i gå längs z-axeln.	39
3.2	Visar snittet genom trotteln parallellt med flödet i överkanten med trotteln.	46
3.3	Grafen visar avståndet till rörväggen i från mitt av öppningen i normalriktning till den begränsande ytan. Avståndet är angivet i antalet breddar på öppningen. Den sträckade markerar 60° grader, den hel-dragna 30° och den prickade 10°	46
3.4	Figuren visar de normaler som avviker mest från varandra.	47
3.5	Figuren visar skillnaden i vinkel mellan normalen vid trottelnkanten, \mathbf{n}_{A2} , och normalen vid rörväggen, utefter samma radie, \mathbf{n}_{A1} . Detta betyder att felet inte går att undvika genom att förfina indelningen. Graferna är genererade för $\beta = 10^\circ$, $\beta = 30^\circ$ respektive $\beta = 60^\circ$ uppräknat underifrån.	47
3.6	Den vänstra bilden visar skillnaden i vinkel mellan normalen vid trottelnkanten inom en uppdelning, dvs skillnaden mellan \mathbf{n}_{A3} och \mathbf{n}_{A2} . Här är halva trottelloppningen uppdelad i 40 intervall. Graferna är genererade av 10° , 30° respektive 60° uppräknat underifrån.	48
3.7	Dessa grafer beskriver samma vinkel som föregående figur. Här har samtliga grafer avbildats för vinkeln $\beta = 60^\circ$, men indelningen har varierats. Graferna representerar en uppdelning på 100, 70 och 40 intervall nerifrån och upp.	48
3.8	Figuren visar vinkeln γ för ovansidan av trotteln som funktion av läget x. Graferna är genererade av 10° , 30° respektive 60° uppräknat uppifrån.	48
3.9	Figuren visar undersidans bakkant på trotteln.	49
3.10	Figuren visar vinkeln γ_{ub} som funktion av läget x. Graferna är genererade av 10° , 30° respektive 60° uppräknat nerifrån.	51
3.11	Den vänstra figuren visar geometrin för en delyta på undersidan av trotteln.	51
3.12	Den högra figuren visar en skärning på undersidan av trotteln.	51
3.13	Den vänstra figuren visar vinkeln γ_{ub} som funktion av läget x. Graferna är genererade av 10° , 30° respektive 60° uppräknat nerifrån.	52

3.14	Den högra figuren visar vinkeln mellan \mathbf{u}_{uf} och planet som spänns upp av \mathbf{u}_{ub} och \mathbf{r}_{ub} för 30° . Det intressanta med vinkeln är att den är lika stor som vinkelskillnaden mellan flödesriktningen i kontraktionen beroende på om kontraktionen beräknas med fram- eller bakkanten med hjälp av mina antagande. Enligt figur (3.15	52
3.15	Bilderna visar kontraktionskoefficienternas beroende av x-koordinaten. Den streckade kurvan bildas av framkanten medan den heldragna skapas av bakkanten. Figureerna är ritade för 10° , 30° respektive 60° . Den sista grafen visar det effektiva α_u för samma vinklar.	53
3.16	De kryssade punkterna är beräknade med den exakta formeln. Den streckade linjen, som nästan helt döljs av den översta heldragna motsvarar Chaplygin's approximation. De heldragna kurvorna motsvarar korrektionskoefficienten för $\alpha_i=0.6, 0.8, 0.9$, och 1 uppifrån och ner.	63
4.1	Beroendet mellan ingående variabler.	70
4.2	Visar den minsta area luftflödet måste passera. Uppräknat ovanifrån i det högra övre hörnet, markerar de olika kurvorna: arean som begränsas av trotteln och rör där trotteln tjocklek är 0, samma area fast tjockleken på trotteln beaktas, den projicerade arean, den största kontakterade tvärsnittsarean och slutligen den minsta kontakterade tvärsnittsarean. I praktiken måste alltså flödet passera en area som ligger mellan de två understa kurvorna.	72
4.3	Den horisontella linjen motsvarar arean av den projicerade ytan. Den prickade linjen motsvarar arean av en trotteln med $t = 0$. Den heldragna är arean av den studerade trotteln. Den sträckade linjen motsvarar den arean vid kontraktionen då ljudhastigheten är uppnådd. Slutligen visar den streck-prickade linjen, arean i kontraktionen då flödeshastigheten kan betraktas som inkompressibel.	73
4.4	De kryssade punkterna markerar uppmätt sambandet mellan en affin avbildning av den mätta spänningen och den genom fysiska mätningar uppmätta vinkeln β . Det går inte att förkasta att potentiometern är linjär.	73
4.5	Cirklarna markerar de justerade arbetspunkter där den största hastigheten är mindre än ljudhastigheten. Kryssen markerar de punkter där ljudhastigheten är uppnådd. Justeringen består i att temperaturen bestämts då $\frac{p_t}{\sqrt{RT_t}} = 500$. Grafen visar en approximation av den teoretiska övre gränsen för strypning.	76
4.6	Biden visar en skiss över hur de olika trycken varierar längs röret vid trotteln. Det är intressant att notera att det statiska trycket vid kontraktionen, är lägre än totaltrycket efter trotteln. Den vanligaste massflödesberäkningen använder $\frac{p_c}{p_t}$ för att beräkna hastigheten vid trotteln, vilket enligt figuren ger en för låg hastighet.	77
4.7	Fasplan.	78

4.8	Punkterna markerar mätningar för $\beta < 30^\circ$. Cirklarna markerar mätningar för $30^\circ \leq \beta < 40^\circ$, kryssen för $40^\circ \leq \beta < 50^\circ$ och slutligen representerar plustecknen mätningar i intervallet $50^\circ \leq \beta$	79
4.9	Punkternas olika betydelser är samma som i föregående figur. I denna beräkning är förlustkoefficienten för engångsförluster 0.6.	79
4.10	Punkterna markerar mätningar för $\beta < 30^\circ$. Cirklarna markerar mätningar för $30^\circ \leq \beta < 40^\circ$	80
4.11	Punkterna markerar mätningar för $\beta < 30^\circ$. Cirklarna markerar mätningar för $30^\circ \leq \beta < 40^\circ$, kryssen för $40^\circ \leq \beta < 50^\circ$ och slutligen representerar plustecknen mätningar i intervallet $50^\circ \leq \beta$. I figuren framgår det tydligt att en stor tryckkvot kan vara en bidragande orsak till stora fel.	81
4.12	Visar linjer där massflödet är konstant. Från vänster börjar det med 0.01kg/s och ökar med 0.01kg/s. De heldragna linjerna motsvarar massflöden på 0.05kg/s, 0.10kg/s och 0.15kg/s. Kurvorna borde vara lodräta under linjen som markerar att ljudhastigheten är uppnådd. Avvikelse beror på diskritisering av lösningen. För stora vinklar β , där de största korrektionerna av trycket för trotteln var nödvändiga, är massflödet starkt beroende av en korrekt tryckkvot.	82
A.1	Visar trotteln då öppningsvinkeln är $\beta = 20^\circ$ och maxhastigheten i inloppet är $\hat{u} = 1\text{m/s}$. Ytan gråskala visar hastigheten U av fluiden.	90
A.2	$\beta = 24^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar totaltrycket, p_t	90
A.3	$\beta = 35^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar det statiska trycket, p	91
A.4	$\beta = 40^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar hastigheten, U	91
A.5	$\beta = 45^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar totaltrycket, p_t	92
A.6	$\beta = 50^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar totaltrycket, p_t	92
A.7	$\beta = 60^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar totaltrycket, p_t	93
A.8	$\beta = 60^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 50\text{m/s}$. Gråskalan representerar hastigheten, U . Jämför likheten mellan den här figuren med simuleringen i figur (A.7).	93
A.9	Bilden visar en närbild av flödet vid den övre öppningen. $\beta = 60^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar totaltrycket, p_t	94
A.10	Bilden visar en närbild av flödet vid den undre öppningen. $\beta = 60^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar totaltrycket, p_t . Vid framsidan på trotteln ser man att flödet inte följer framsidan av trotteln ut till kanten. Detta gör att vinkelförändringen flödet genomgår från framkanten bli felberäknad.	95
A.11	$\beta = 70^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar hastigheten, U	96

Beteckningar

Fluidodynamiska beteckningar

Beteckning	Förklaring	enhet
a	ljudhastigheten	m/s
C	korrektionskoefficient för kompressibilitet	-
C_D	utströmningskoefficient	-
F	kraft	N
F	komplex hastighetspotential	m^2/s
h	entalpi	J/kg
K	förlustkoefficient	-
\dot{m}	massflöde	kg/s
M	machtalet	-
p	statiskt tryck	Pa
P	andel av flöde	-
q	värmemängd per massenhet	J/kg
R	specifikt gaskonstant	J/(kgK)
Re	Reynoldstalet	-
t	tid	s
T	temperatur	K
u	medelhastighet i ett tvärsnitt	m/s
\mathbf{u}	flödesfältet	m/s
U	beloppet av hastigheten	m/s
(u, v, w)	hastighet	m/s
α	kontraktionskoefficienten	-
γ	vinkelförändring som flöden måste genomgå	-
ζ	komplex hastighet	m/s
ϑ	flödesriktning i det komplexa talplanet	-
κ	c_p/c_v	-
λ	friktionsfaktor	-
μ	dynamisk viskositet	kg/(sm)
ρ	densiteten	kg/m ³
ν	kinematisk viskositet	m ² /s
ϕ	hastighetspotential	m ² /s
ψ	strömfunktion	m ² /s
ψ	utströmningsfaktor	-

Geometriska beteckningar

Beteckning	Förklaring	enhet
A	area	m^2
\mathbf{A}	den begränsade arean vid trotteln	m^2
$A(\beta)$	den begränsande area vid trotteln	m^2
A, B, C, E, O	Punkter definierade i geometri	-
b	bredden på springan	m
d	axelns diameter	m
D	rördiameter	m
L	avstånd i rörets längdriktning	m
\mathbf{n}	normal	m
O	omkrets	m
(r, θ, z)	position i cylinderkoordinater	m
R	radie	m
\mathbf{R}	rotationsmatris	-
t	tjocklek på trottelpattan	m
\mathbf{t}	tangent	m
\mathbf{T}	planet som motsvarar trotteln framsida	-
(x, y, z)	position i rektangulära koordinater	m
z	komplex position	m
β	trottels öppningsvinkel	-
φ	trotteln vinkel till vertikalplanet	-

Allmänna beteckningar

Beteckning	Förklaring
a, b, c, k	diverse konstanter
f	funktion
F	funktion
n	dimensionslös konstant (heltal)
t	parameter

Indexering

De låga indexet beror generellt på var variabeln är giltig.

Index	Förklaring
c	kontraktion
h	hydraulisk
H	den vanligaste beräkningen av massflöde [4]
i	inkompressibel
i	diskretisering
in	inloppet
j	diskretisering
kr	kritisk
m	mittpunkt
mf	mittpunkten av delintervall på trotteln framkant
o	ovan
p	parameterplanet
s	sluten (i trottelsammanhang)
t	det värde variabeln skulle ha i vila, ex totaltryck
u	under
ub	undersidans bakre kant
uf	undersidans främre kant
ut	utloppet
x, y, z	respektive komponent i tillhörande vektor

Accenter

Symbol	Förklaring
\bar{x}	medelvärdet av x
\hat{x}	maximala värdet av x
\hat{x}	enhetsvektor i x-led
\check{x}	minimala värdet av x
Δx	differens av i sammanhang givna x
'	spegelbild
∂	randen av området

Kapitel 1

Inledning

Under 1900-talet har användningen av fossila bränslen ökat i explosionsartad takt. I vissa städer har avgaser från förbränning blivit ett akut problem. Under det senaste deceniet har det också blivit möjligt att studera de globala effekterna av utsläppen. Larmrapporter har strömmat in om ozonhål och växthuseffekt, mm.

Miljösituationen har tvingat fram stränga regleringar om vad som får släppas ut. Faktum är att en förbränning som sker under gynnsamma betingelser inte på långa vägar är så miljöfarlig som en oreglerad förbränning.

För att tillgodose lagkraven har stora ansträngningar gjorts för att minska utsläppen. Idag har biltillverkarna kommit långt med reglering av förbränning. För att möjliggöra en exakt styrning av motorn måste varje komponents egenskaper i motorn vara kända. En av dessa komponenter är trotteln, som styr luftflödet till motorn genom att vinkla ett spjäll. Den har funnits i motorer sedan de uppfanns. När kraven ökat har massflödet förbi trotteln slagits upp i stora datasamlingar. Den metoden är kanske inte användbar i framtiden när styrsignalerna ökar i antal.

Detta leder fram till frågeställningarna som behandlas i detta examensarbete. Kortfattat handlar rapporten om att försöka beskriva flödet runt trotteln kvalitativt och kvantitativt. En av huvudfrågorna är att studera sambandet mellan tryckför-lusten över trotteln och massflödet förbi trotteln.

Studier av en tvådimensionell trottel

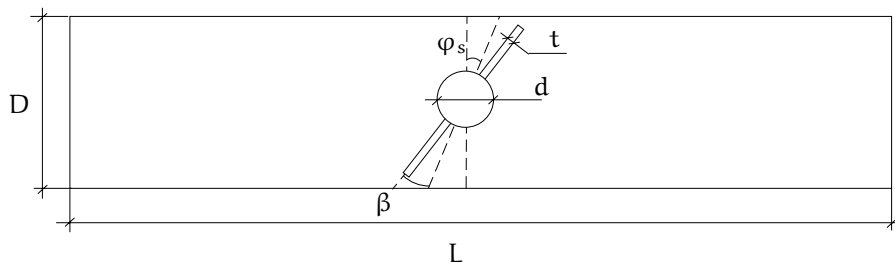
I detta kapitel lägger vi grunden för förståelsen av sambandet mellan massflöde och tryckförlust över en tvådimensionell trottel. Simuleringar utförda i femlab kommer att användas för validering av teorin. För att få grepp om problemet studeras det 2D-fallet vilket tack vare symmetri också kan ses som det längsgående snittet som delar trotteln i två lika delar. Av simuleringstekniska skäl är det rimligt att börja med att anta att flödet är inkompressibelt.

2.1 Huvudekvationer för inkompressibel strömning

Ekvationer som presenteras i detta kapitel utan härledning eller referens kommer från [7]. Dessa ekvationer kommer i rapporten att tas för givna. Den som funderar över någon av ekvationerna hänvisas till grundböcker i fluidodynamik t ex [1] eller [6].

2.2 Simulering

Simuleringarna har utförts i femlab. Simuleringarna för inkompressibelt flöde blev så beräkningstunga att kompressibel simulering inte blev aktuell inom rapportens tidsram. Det har varit svårt att få lösningarna att konvergera, då öppningsvinkeln varit liten. Detta beror på att hastigheterna blivit stora och att meshen kring öppningarna tvingats vara mycket finmaskig. Desutom verkar det som om konvergens försämras av stora skillnader mellan ytorna av trianguleringen. Resultatet blev att simuleringar utförts för öppningsvinklar från ca 20 grader till fullt öppen trottel.



Figur 2.1 Geometrin som simuleringar och beräkningar i det tvådimensionella fallet bygger på.

2.2.1 Initialvillkor

Initialvillkoren spelar också stor roll för konvergensen. Till en början användes en drivande tryckdifferens. Metoden var känslig för vilket initialtryck som ansattes. Därför övergick jag till att ansätta ett konstant inflöde medan trycket efter trotteln hölls konstant. Fördelen med detta är att initialtrycket exempelvis kan sättas till konstant lika med trycket på utgången.

2.2.2 Intressanta storheter

De variabler som rör simuleringen presenteras i tabellform nedan.

Inparametrar	Resultat
ρ densiteten	\hat{u} hastighet
μ dynamisk viskositet	\dot{m} massflöde
p_{ut} statiska trycket vid utflödet	Δp tryckdifferans
\hat{u}_{in} största hastigheten i inloppet	P_o andel av flöde över trotteln
D rördiameter	P_u andel av flöde under trotteln
d axeldiameter	α_o kontraktionskoefficienten
φ_s den slutna trottels vinkel till vertikplanet	α_u kontraktionskoefficienten
β trottels öppningsvinkel	
t tjockleken på trottelpattan	
L längden av röret	

I figur (2.2.2) definieras geometrin.

2.2.3 Problemets konstanter

Rörgeometri och trottelveometri är fixa i simuleringarna. De dimensioner som används är

D	=	46	mm
d	=	10	mm
φ_s	=	4.4°	
t	=	1	mm
L	=	40	cm

2.3. LAMINÄRT ELLER TURBULENT FLÖDE I INLOPPET TILL TROTTELN?

Dessutom gäller att för det inkompressibla fallet är flödet oberoende av det absoluta trycket. Detta ser man om man betraktar differentialekvationerna för inkompressibel strömning. Här följer Navier-Stokes ekvationer för inkompressibel tvådimensionell strömning där masskrafterna är satta till noll.

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Eftersom endast tryckets gradient finns med i ekvationen kommer inte referensnivån på trycket att förändra flödet. Därför sätts trycket i utloppet till noll. Konstanterna som rör gasen är följande $p_{\text{ut}} = 0 \text{ Pa}$, $\mu = 18.1 \cdot 10^{-6} \text{ kg/sm}$ och $\rho = 1.189 \text{ kg/m}^3$. Det kan nämnas att densitet och dynamisk viskositet beror på luftens sammansättning och temperatur. Dessa beroenden kan man dock bortse ifrån och betrakta densitet och dynamisk viskositet som konstanter.

2.2.4 Problemets variabler

Det som återstår att variera är trottelnns öppningsvinkel β och massflödet \dot{m} in i röret. För att kunna simulera flödet måste emellertid hela hastighetsprofilen i inloppet bestämmas. Hastighetsprofilen bestämmer därmed också massflödet. Det finns principiellt två olika hastighetsprofiler, en laminär och en turbulent profil. Detta leder till att det är intressant att bestämma vilket flödesalternativ som råder.

2.3 Laminärt eller turbulent flöde i inloppet till trotteln?

Vid sådana omständigheter som råder i en motor kommer flödet alltid att vara turbulent. Flödet kommer också att vara turbulent i simuleringarna.

2.3.1 Approximativ beräkning av turbulens i rör

Det finns principiellt två olika hastighetsprofiler. Den ena gäller vid laminärt flöde och den andra vid turbulent flöde. För att avgöra om flödet är turbulent eller laminärt i inloppet används Reynolds tal, Re . Som en allmänt vedertagen tumregel gäller att för $Re > 2300$ så är flödet i regel turbulent. 2300 kallas för det kritiska Reynolds talet, Re_{kr} , för strömning i cirkulära rör. Beräknar man Re_{kr} , som motsvarar medelhastighet, med vanligt förekommande värden i trottelsammanhang får man

$$Re_{kr} = \frac{u \cdot D}{\nu} \Leftrightarrow u = \frac{Re_{kr} \cdot \nu}{D} = \frac{2300 \cdot 15.2 \cdot 10^{-6}}{0.046} \approx 0.76 \text{ m/s} \quad (2.2)$$

2.3.2 Approximativ beräkning av turbulens mellan två plana plattor

För att beräkna motsvarande hastighet för simuleringen ersätts diametern med den hydrauliska diametern $D_h = \frac{4A}{O}$. I fallet med plana plattor får man

$$D_h = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4Dx}{2D + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2D}{\frac{D}{x} + 1} = 2D \quad (2.3)$$

Motsvarande kritiska medelhastighet blir 0.38 m/s. Hastigheter under de kritiska värdena är mycket sällsynta, varför slutsatsen är att strömningen är turbulent.

2.4 Ansatt hastighetsprofil i inloppet

För turbulent strömning i cirkulära rör gäller approximativt att hastighetsprofilen är

$$u(r) = \hat{u} \left(\frac{R-r}{R} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (2.4)$$

vid fullt utbildad strömning. Trots att profilen gäller för cirkulära rör, har profilen använts i inloppet. Anledningen till att det inte spelar någon roll är att flödet har tid på sig att rätta in sig i den korrekta profilen långt innan flödet når trotteln, eftersom inloppet är valt tillräckligt långt. För att studera hastighetsprofiler kan bok [6] rekommenderas.

2.5 Vad beror tryckförlusten på?

Tryckförlusten beror i första hand på areaökning och i andra hand på areaminskning enligt beräkningar baserade på formler i [7].

Den primära frågan är hur tryckförlusten Δp kan beräknas, då massflöde och geometri är kända. Det finns friktionsförluster längs röret samt engångsförluster. Engångsförlusterna kan delas upp i förluster vid areaökning, areaminskning samt krökning av flödet enligt [1]. Storleksordningen beräknas av respektive förlust för att se om någon av dessa är dominant.

2.5.1 Friktionsförluster

Friktionsförlust vid rakt rör, egentligen mellan två plattor, kan i det turbulenta fallet beräknas på samma sätt som för cirkulära rör, om diametern ersätts med den hydrauliska diametern. Sedan tidigare är $D_h = 2D$. Här följer ekvationen som beräknar friktionsförlusten Δp .

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D_h} \frac{\rho u^2}{2} \quad (2.5)$$

där λ kan beräknas som

$$\lambda = 0.3164\text{Re}^{-\frac{1}{4}} \quad (2.6)$$

då $2300 < \text{Re} < 10^5$. Reynoldstalet är $\text{Re} = \frac{0.82 \cdot 2 \cdot 0.046}{15.2 \cdot 10^{-6}} = 4963.2$. Detta ger $\lambda = 0.0377$. Tryckförlusten på grund av friktion längs rörväggarna är ca

$$\Delta p = 0.0377 \cdot \frac{0.4}{2 \cdot 0.046} \frac{1.189 \cdot 0.82^2}{2} = 0.0655\text{Pa} \quad (2.7)$$

2.5.2 Engångsförluster

Engångsförluster beräknas enligt

$$\Delta p = K \frac{\rho u^2}{2} \quad (2.8)$$

där K är förlustkoefficienten. Det är tillräckligt att jämföra förlustkoefficienterna för respektive engångsförlust.

För ganska stora öppningsvinklar är kvoten mellan den minsta arean vid passagen förbi trotteln och rörets area i storleksordningen 0.5. Då är förlustkoefficienterna $K = 0.5$ för areaökning och $K = 0.2$ för areaminskning.

Vid krökning är förlustkoefficienten K i en 90-graderskrök i ett cirkulärt rör ca 0.1. Enligt simuleringarna böjs däremot inte huvuddelen av flödet mer än några enstaka grader. Detta borde göra att förlustkoefficienten är betydligt lägre.

Tryckförlusten beräknas för den dominanta förlustkoefficienten för jämförelse med friktionsförlusten.

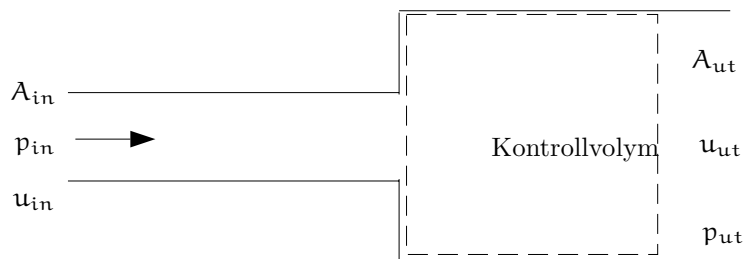
$$\Delta p = 0.5 \frac{1.189 \cdot 0.82^2}{2} = 0.1999\text{Pa} \quad (2.9)$$

Utredningen visar, att redan då trotteln har stor öppning kommer expansionsförlusten att vara ca 3 ggr större än friktionsförlusten. En naturlig fortsättning är att studera orsakerna till att en areaökning ger upphov till en tryckförlust.

2.6 Tryckförlust i ett parallellkopplat system

Tryckförlusterna för de två vägarna förbi trotteln är lika.

Det finns två vägar förbi trotteln, en ovan och en under. Tryckförändringar tvärs röret är mycket små och en kort sträcka före och efter trotteln är de också symmetriska kring centrum av röret. Enligt simuleringarna varierar inte totaltrycket signifikant mycket tvärs röret. Detta gör att tryckskillnaden från inloppet till utloppet är lika oberoende av väg förbi trotteln, dvs $\Delta p_o = \Delta p_u$. Det går att dra paralleller till ellärens parallellkopplade resistorer, där strömmen fördelar sig på ett sådant sätt att spänningen över motstånden blir densamma.



Figur 2.2 Geometri och beteckningar för beräkningar rörande areaökning.

2.7 Är det tillräckligt att betrakta tryckförlusten enbart för areaökningen?

En av huvudfrågorna är att uttrycka ett samband för den bråkdel av flödet som strömmar under trotteln. I simulering kan resultatet beskådas i figur (2.4). "Tillräckligt" ska tolkas som att tryckförlusten kan förklara utseendet av den nämnda figuren. Svaret på rubriken blir då nej! Det räcker inte med att bara betrakta tryckförlusten för areaökningen.

För att beräkna det verkliga tryckfallet används lagen om rörelsemängdens bevarande och antagandet att den enda kraften som verkar i expansionen är en normalkraft. För stationärt endimensionellt flöde tar impulssatsen för kontrollvolymen i figuren [7] följande form i strömningsriktningen

$$F = \rho u_{in}^2 A_{in} - \rho u_{ut}^2 A_{ut} + p_{in} A_{in} - p_{ut} A_{ut} \quad (2.10)$$

Eftersom skjuvkrafter mot rörväggarna försummas är den enda kraften mellan vägg och fluid trycket mot väggen vid areaökningen.

$$F = -p_{in}(A_{ut} - A_{in}) \quad (2.11)$$

Sätts (2.11) in i (2.10) fås ett uttryck för den statiska tryckdifferensen.

$$(p_{ut} - p_{in})A_{ut} = \rho u_{in}^2 A_{in} - \rho u_{ut}^2 A_{ut} \quad (2.12)$$

Det intressanta är emellertid totaltryckets differans. För att gå vidare behöver man kontinuitetsekvationen och definitionen av totaltrycket.

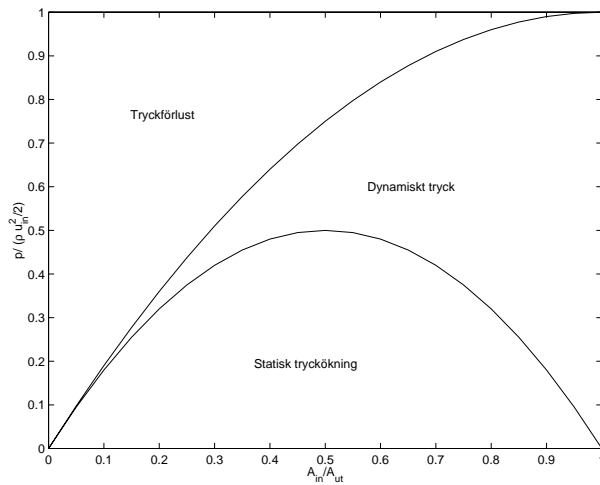
$$u_{ut} A_{ut} = u_{in} A_{in} \quad (2.13)$$

$$p_t = p + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (2.14)$$

Ur dessa ekvationer får man den totala tryckförlusten som

$$\Delta p_t = p_{t_{in}} - p_{t_{ut}} = \frac{1}{2} \rho u_{in}^2 \left(1 - \frac{A_{in}}{A_{ut}}\right)^2 = \frac{\rho}{2} (u_{in} - u_{ut})^2 \quad (2.15)$$

2.8. KAN AREAMINSKNING OCH AREAÖKNING FÖRKLARA MASSFLÖDET?

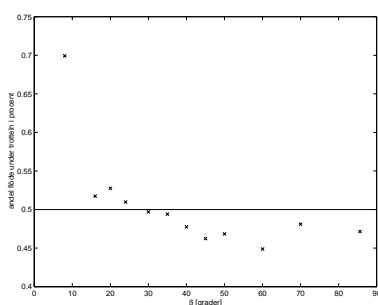


Figur 2.3 Här visas hur det dynamiska trycket delas upp i en ren tryckförlust, nytt dynamiskt tryck och statisk tryckökning. Dessa förhållanden är plottade mot kvoten A_{in}/A_{ut} . När kvoten är noll, vilket innebär att utströmning sker i en oändligt bred behållare, kommer allt dynamiskt tryck att gå förlorat. I andra extremfallet kommer kvoten att vara ett, vilket innebär att det inte finns någon areaförändring. I detta fall kommer givetvis inget att förändras utan allt dynamiskt tryck kommer att bestå. Det kan också nämnas att högst hälften av det dynamiska trycket kan omvandlas till statiskt tryck vid en direkt areaökning.

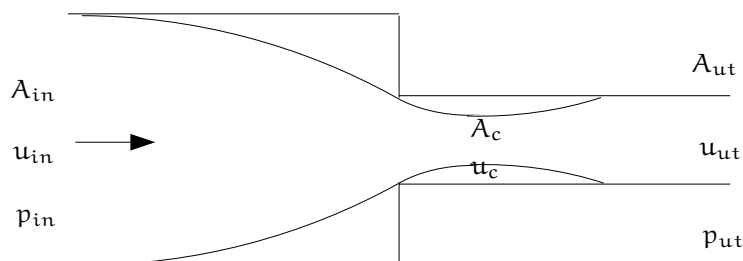
För att få en komplett bild av fenomenet, så visar figur (2.3) hur det ingående dynamiska trycket fördelas mellan statisk och dynamisk tryck samt tryckförlust. Δp beror alltså på medelhastigheten u och areakvoten A_{in}/A_{ut} . Tack vare symmetri hos trotteln kommer bredden på öppningen över och under trotteln att vara lika. Om man sätter tryckförlusterna för respektive väg lika, innebär det att flödet kommer att fördela sig lika. Så är emellertid inte fallet enligt simuleringarna, där resultatet visas i figur (2.4). Detta leder till att modellen måste förbättras. Kan summan av de olika tryckförlusterna förklara fenomenet? Detta leder till att det blir intressant att studera den näst största förlusttermen, areaminskningen.

2.8 Kan areaminskning och areaökning förklara massflödet?

Tryckförlusten för areaminskning och areaökning förklarar snedfördelningen. Det visar sig att förluster förknippade med areaminskning i själva verket är effekter av areaökning. Det bildas en stråle från mynningen av det mindre röret. Strålens minsta area är mindre än den nya arean, varför flödet expanderar ut i det mindre röret. Strålens kontraktion beror av geometrin runt begränsningen, som inte är lika



Figur 2.4 Punkterna visar andelen av flödet, som tar den undre vägen uttryckt i procent. Simuleringen är utförd, då högsta inflödeshatighet är 1m/s. Punkten vid 8 grader är osäker pga att simuleringen konvergerat.



Figur 2.5 Geometri och beteckningar för beräkningar rörande areaminskning.

ovanför och under trottnen.

Enligt [6] beror tryckförlusterna endast på att flödet måste genomgå en areaökning, varför kontraktionen i det smalare röret blir avgörande för tryckförlusten. Kontraktionskoefficienten definieras av sambandet

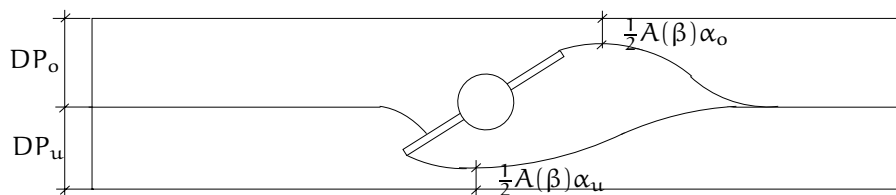
$$\alpha = \frac{A_c}{A_{ut}} \quad (2.16)$$

dvs som kvoten mellan strålens minsta area och rörets minsta area. På detta vis överför man tryckförlusten vid en areaminskning till tryckförlusten vid en areaökning. Om man sätter $p_c = p_{in}$ och $u_c = u_{in}$ i ekvation (2.15) får man

$$\Delta p_t = \frac{1}{2} \rho u_c^2 (1 - \alpha)^2 = \frac{1}{2} \rho u_{ut}^2 \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (2.17)$$

Det sista ledet erhålls efter omskrivning av u_c med kontinuitetsekvationen. Eftersom areaminskningens tryckfall egentligen beror på areaökningen mellan den kontraherade strålens tvärsnittsarea och det nya mindre röret, sammanfaller orsaken till tryckfallet. Det som tillkommer är en bestämning av den minsta area som genereras av flödet vid passagen. Detta flöde bestäms i sin tur av geometrin vid tillflödet till

2.9. HUR KAN ANDELEN MASSFLÖDE UNDER TROTTELN BERÄKNAS?11



Figur 2.6 Principiell geometri som beräkningarna i det tvådimensionella fallet bygger på.

öppningen. Det verkar rimligt att de olika geometrierna kan ge upphov till olika flöden över och under trotteln och förhoppningsvis förklara den simulerade andelen flöde som tar den undre vägen.

2.9 Hur kan andelen massflöde under trotteln beräknas?

Andelen massflöde som flyter under trotteln respektive över trotteln beräknas enligt

$$P_u = \frac{\alpha_u}{\alpha_o + \alpha_u} \text{ och } P_o = \frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_u}. \quad (2.18)$$

2.9.1 Antaganden

- För att kunna räkna på trotteln i två dimensioner har följande antaganden gjorts
- All tryckförlust sker på grund av areaökning
 - Areaökningen före trotteln kan försummas
 - $-\Delta p_o = \Delta p_u$
 - Flödet som flutit över trotteln blandar sig väl med flödet som flutit under trotteln.

2.9.2 Metod

Först uttrycks tryckförlusterna för respektive väg under givna antaganden. I dessa uttryck ingår fraktionen av massflödet. Avslutningsvis sätts förlusterna lika och andelen löses ut.

2.9.3 Utredning

Tryckförlusterna kan beräknas med formeln (2.15) för areaökningen. Den minsta arean är den kontraherade strålens area dvs $A_i = \frac{1}{2}A(\beta)\alpha_i$ där $i \in \{o, u\}$. Flödet som passerar genom öppning i skall fylla upp P_i av hela rörets tvärsnittsarea, under förutsättning att flödet blandas efter trotteln. Om antagandet inte är korrekt, vilket Heywood [4] antyder, så är det en bra approximation, då flödena inte avviker mycket

från 50%. Vi får sambandet uttryckt i formler som följer $A_{ut} = DP_i$. Substitueras uttrycken för A_{in} och A_{ut} i ekvation (2.15) får man följande ekvation

$$\Delta p_i = \frac{1}{2} \rho u_i^2 \left(1 - \frac{\alpha_i A(\beta)}{2P_i D}\right)^2 \quad \text{för } i \in \{o, u\} \quad (2.19)$$

Kontinuitetsekvationen ger oss yttreliare ett samband

$$u_i \alpha_i \frac{1}{2} A(\beta) = u_{ut} P_i D = u_{in} P_i D \quad \text{för } i \in \{o, u\} \quad (2.20)$$

vilket är ekvivalent med att

$$u_i = \frac{2u_{in} P_i D}{\alpha_i A(\beta)} \quad \text{för } i \in \{o, u\} \quad (2.21)$$

Använder man nu antagandet att tryckförlusten är oberoende av vägen och ersätter u_i med ovanstående ekvation fås efter rottagning

$$\frac{2u_{in} P_u D}{\alpha_u A(\beta)} \left(1 - \frac{\alpha_u A(\beta)}{2DP_u}\right) = \frac{2u_{in} P_o D}{\alpha_o A(\beta)} \left(1 - \frac{\alpha_o A(\beta)}{2DP_o}\right) \iff$$

$$\frac{P_u}{\alpha_u} = \frac{P_o}{\alpha_o} \quad (2.22)$$

Eftersom fraktionernas summa är ett, följer att fraktionerna endast är funktioner av kontraktionskoefficienterna.

$$P_u = \frac{\alpha_u}{\alpha_o + \alpha_u} \quad \text{och} \quad P_o = \frac{\alpha_o}{\alpha_o + \alpha_u} \quad (2.23)$$

2.10 Vilket förhållande råder mellan hastigheterna i kontraktionerna?

Hastigheterna i kontraktionerna kommer, under samma förutsättningar som tidigare, att bli lika stora för respektive väg.

2.10.1 Beräkning av medelhastigheten i kontraktionen

För att visa att hastigheterna är lika används resultatet (2.23) i (2.21)

$$u_i = \frac{2u_{in} P_i D}{\alpha_i A(\beta)} = \frac{2u_{in} D}{(\alpha_o + \alpha_u) A(\beta)} \quad \text{för } i \in \{o, u\} \quad (2.24)$$

2.10.2 Beräkning av maxhastigheten i kontraktionen

Enligt simuleringarna antas flödets högsta hastighet i kontraktionen. Den maximala hastigheten i flödet är intressant med tanke på att det riktiga flödet väl approximeras med inkompressibel gas till ca en tredjedel av ljudhastigheten.

För att få en uppfattning om när det är möjligt att använda en inkompressibel modell, antas, att hastighetsprofilen är densamma i både inloppet och vid trottekn. Kalla den normerade profilen för $f(x)$ med $D_f = [0, 1]$ och $V_f = [0, 1]$. Den intressanta egenskapen är om kvoten mellan medel- och maxhastighet är en konstant, dvs $u = \bar{f}\hat{u}$ oberoende av snitt. Detta ger att maxhastigheten \hat{u} approximativt kan beräknas som

$$\hat{u} = \frac{2u_{in}P_iD}{\bar{f}(\alpha_o + \alpha_u)A(\beta)} \quad (2.25)$$

2.11 Hur beräknas tryckförlusten?

Tryckförlusten beräknas exempelvis som

$$\Delta p = \frac{\rho}{2}(u_c - u_{in})^2. \quad (2.26)$$

Utgå från ekvation (2.19). Eftersom tryckförlusten är oberoende av välgval uttrycks resultatet i variabler som är oberoende av vägen.

$$\Delta p = \frac{\rho u_i^2}{2} \left(1 - \frac{A(\beta)\alpha_i}{2P_iD}\right)^2 = \frac{\rho}{2}(u_c - u_{in})^2 \quad (2.27)$$

efter användning av (2.23) och (2.24).

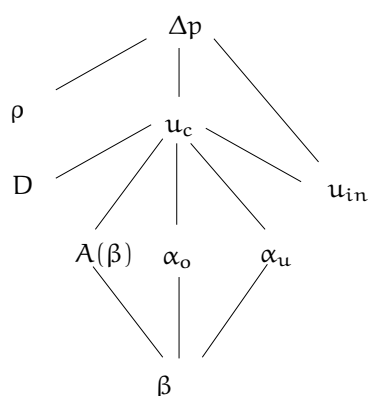
2.12 Vad återstår att beräkna?

Det som återstår att beräkna är $A(\beta)$, α_o , α_u och \bar{f} .

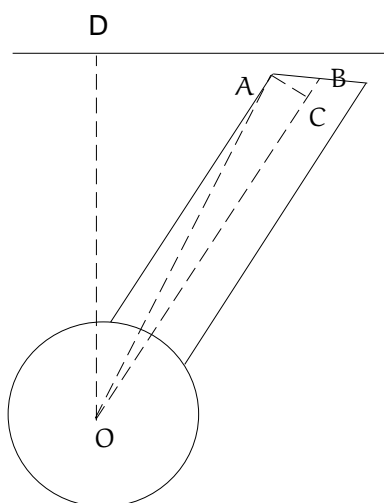
För att strukturera problemet visas hur variablerna beror av varandra genom att rita in dem i en trädstruktur i figur (2.7). D och ρ räknas som kända konstanter medan u_{in} och β är problemets variabler. Det enda som återstår att bestämma är de variabler som direkt beror på β eftersom u_c :s beroende av dessa variabler är känt. Förutom bestämning av dessa variabler återstår också konstanten \bar{f} . I följande avsnitt beräknas β -beroendet för var och en av uttrycken $A(\beta)$, α_o och α_u samt att approximera \bar{f} .

2.13 Beräkning av arean i två dimensioner

För att bestämma tryckförlusten är öppningens storlek betydelsefull. I figur (2.8)



Figur 2.7 Sambandet mellan variablerna i problemet.



Figur 2.8 Skiss av trotteln. Figuren visar införda beteckningar vid beräkning av arean.

definieras de beteckningar som används. Arealen beräknas enligt uttrycket

$$A(\beta) = D - 2|OA| \cos(\angle AOE). \quad (2.28)$$

Beräkningen av $|OA|$ sker på följande vis:

$$|OA|^2 = (|OB| - |BC|)^2 + |AC|^2 = \left(\frac{D}{2} \cos(\varphi_s) - \frac{t}{2} \tan(\varphi_s)\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 \quad (2.29)$$

Slutligen uttrycks vinkeln AOE

$$\angle AOE = \varphi_s + \beta - \angle AOC = \varphi_s + \beta - \arctan\left(\frac{|AC|}{|OC|}\right) = \quad (2.30)$$

$$\varphi_s + \beta - \arctan\left(\frac{1}{\frac{D}{t} \cos(\varphi_s) - \tan(\varphi_s)}\right).$$

2.14 Vad beror kontraktionskoefficienten huvudsakligen av?

Den ideala kontraktionskoefficienten beror framförallt på vinkelförändringen, γ , som flödet vid strålens rand måste genomgå.

I detta sammanhang betyder ideal kontraktion att gasen är viktlös, ideal, inkompressibel och virvelfri. Flödet är tvådimensionellt stationärt och väggarna är friktionslösa. Under dessa förutsättningar finns det framförallt två variabler. Den första är att kontraktionen beror på hur stor areaminskningen är och den andra variabeln utgörs av den vinkel som väggen har in mot areaminskningen.

Hur påverkas α av areaförminskningen?

Om strypningen är vinkelrät kan man uttrycka kontraktionen som funktion av kvoten mellan den kontraherade arean och den största area, $\frac{A_c}{A_{in}}$ [11].

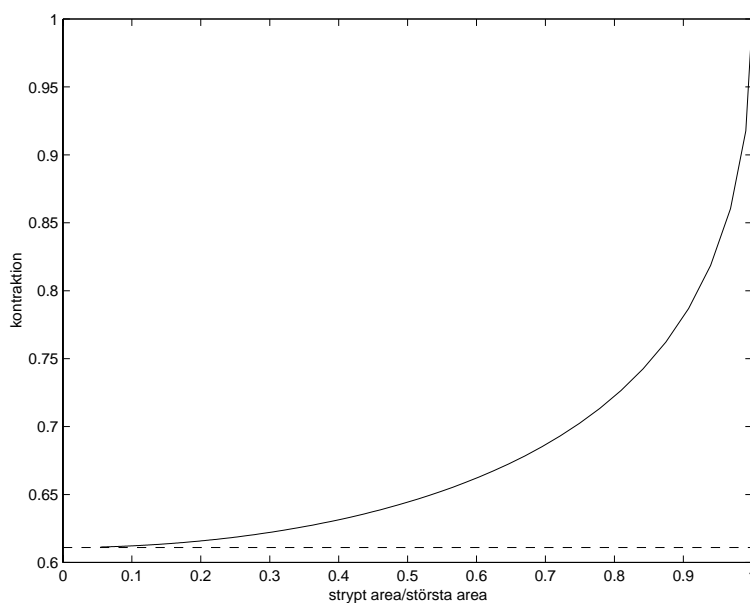
$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{\pi} \left(\frac{u_c}{u_{in}} - \frac{u_{in}}{u_c} \right) \cot^{-1} \left(\left(\frac{u_c}{u_{in}} - \frac{u_{in}}{u_c} \right) \right)} \quad (2.31)$$

$$A_c u_c = A_{in} u_{in} \quad (2.32)$$

Enligt figur (2.9) ser man att kontraktionen inte beror så mycket på storleken av areaminskningen, för kvoter mindre än 0.5. Detta motsvarar en vinkel $\beta = 60^\circ$. För så stora vinklar kommer axeln att inverka. Det är en rundad yta som kräver en speciell analys. För att begränsa arbetet betraktas endast vinklar då trottelaxeln inte påverkar flödet.

2.15 Den ideala kontraktionskoefficientens beroende av γ

Den ideala kontraktionskoefficienten kan efter långa räkningar approximeras av polynomet med koefficienterna



Figur 2.9 Visar kontraktionskoefficienten i en areaminskning med rät vinkel. Främst kommer vinklar mindre än 60° att studeras. 60° motsvarar en areakvot på en halv. Det intressanta i figuren är att kontraktionen inte är speciellt beroende av areakvoten då areakvoten är under 0.5.

k	a_k
0	1.0000
1	-0.0077
2	$5.5930 \cdot 10^{-5}$
3	$-2.5597 \cdot 10^{-7}$
4	$5.3510 \cdot 10^{-10}$

där polynomet skrivs som

$$\alpha(\gamma) = \sum_{k=0}^6 a_k \gamma^k \quad (2.33)$$

2.15.1 Bakgrund

Analytisk beräkning av kontraktionskoefficienten i inkompressibelt flöde kräver vissa antaganden. Antag att flödet är virvelfritt och att masskrafter kan försummas. Flödets inkompressibilitet medför med hjälp av kontinuitetsekvationen att hastig-

2.15. DEN IDEALA KONTRAKTIONSKOEFFICIENTENS BEROENDE AV γ 17

hetsfältet är källfritt, vilket uttrycks som

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.34)$$

Antagandet om att flödet är virvelfritt leder till att fältet kan uttryckas som gradienten av en skalär potential [10], dvs

$$\mathbf{u} = \nabla\phi. \quad (2.35)$$

Sätts den senare ekvationen (2.35) in i den tidigare (2.34) fås Laplace ekvation

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla\phi = \Delta\phi = 0. \quad (2.36)$$

Konstruera en komplex analytisk hastighetspotential där realdelen får vara den reella hastighetspotentialen.

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (2.37)$$

Enligt funktionsteorin kommer båda funktionerna ϕ och ψ att vara harmoniska, dvs lösningar till Laplace ekvation [5]. Cauchy-Riemanns ekvationer ger att

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0 \quad (2.38)$$

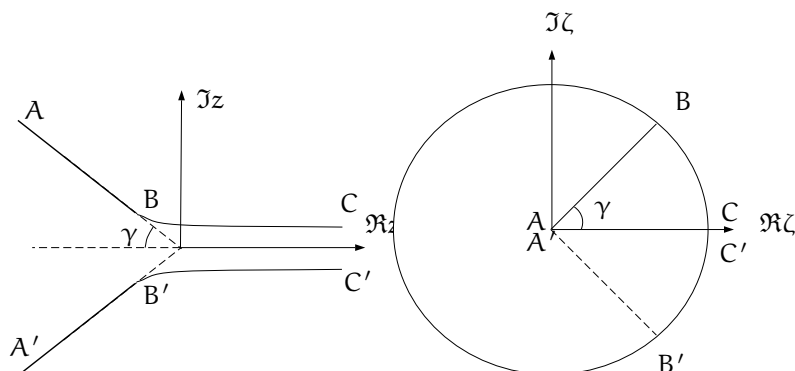
dvs att $\nabla\psi \perp \mathbf{u}$, som också kan uttryckas som att ψ är konstant längs varje strömlinje.

2.15.2 Metoden

För det första ska en analytisk funktion F till området i ζ -planet bestämmas. Detta medför att $\psi(u, v)$ är harmonisk i området. Sedan verifieras att randvillkoren är uppfyllda. För det andra bildas en analytisk och konform avbildning till det intressanta området i z -planet från området i ζ -planet. Nu följer att $\psi(u(x, y), v(x, y))$ är harmonisk i z -planet, enligt [5]. Randvillkoren i z -planet följer av randvillkoren i ζ -planet. Eftersom Laplace ekvation är uppfylld i det inre och randvillkoren $\psi = 0$ är uppfyllda på randen, följer av entydighet att den funna lösningen är den enda. Det är speciellt enkelt att hitta den analytiska hastighetspotentialen F för vinklar, γ , som är kvoten mellan 180° och ett heltal. För dessa vinklar kan den analytiska funktionen F i ζ -planet konstrueras genom att superponera lösningar för källor och sänkor.

2.15.3 Randvillkor

För det första ska väggarna och strålens rand utgöra en strömlinje, dvs ψ 's derivata i normalriktning till ytorna är noll. För det andra kommer hastigheten att vara konstant på strålens rand, om fluiden kan anses opåverkad av masskrafter. I praktiken innebär detta att hastigheten inte får vara för låg då tyngdkraften kan bli påtaglig men heller inte så hög så att fluiden kan anses vara inkompressibel.



Figur 2.10 I den vänstra figuren ses geometrin där Laplace ekvation ska lösas. I den högra ses tillhörande hodograf

2.15.4 Geometrin

Till att börja med placerar man den aktuella geometrin i det komplexa z -planet. A , A' respektive C och C' befinner sig i oändligheten. B och B' är varandras spegelbild i reella axeln och ligger i punkterna $z = \frac{b}{2\sin(\gamma)} e^{i\pi(1-\gamma)}$. Sedan införs en komplex hastighet, som definieras som $\zeta = u - iv$. Om vi börjar i punkt A och A' så inses att motsvarande punkter avbildas i hodografens origo på grund av att detta är stagnationspunkter. Följer man flödeslinjerna från A till B så accelereras fluiden med bibehållen riktning. Detta ger upphov till en stråle med vinkel γ in i höger halvplan. Mellan B och C genomgår fluiden endast en omriktning för att till slut få en riktning parallell med den reella axeln. Detta motsvaras i hodografen av en cirkelbåge från punkt B till den reella axeln. Motsvarande primade punkter avbildas spegelvänt på undre halvplanet på grund av symmetri.

2.15.5 Den komplexa hastighetspotentialen $F(\zeta)$

Metoden för att lösa problemet består i att hitta en analytisk funktion för området i hodografen och som satisfierar randvillkoren. Detta görs genom att superponera enkla funktioner av källor. Placera en källa i origo. Källstyrkan måste motsvara styrkan i flödet. Flödesstyrkan kan mellan C och C' beräknas som $U_c \alpha h$. Eftersom det ska bli n stycken lika sektorer kommer endast en n :te del av flödet att passera in genom den intressanta sektorn. Den korrekta flödesstyrkan blir således $nU_c \alpha h$. Sänkorna placeras i punkterna $\zeta = U_c e^{i\frac{2\pi}{n}k}$ där $k \in [0, n-1]$. Varje sänka är av styrkan $2U_c \alpha h$. Egentligen finns det också en källa i oändligheten med samma styrka som i origo. Detta gör att sänkorna har dubbel styrka. De ska dels ta hand om flödet från sektorn men också extraflödet från utifrån. Källan i oändligheten påverkar dock inte funktionsuttrycket i sektorn mer än indirekt genom att polerna har dubbel styrka.

$$F(\zeta) = \frac{\alpha U_c h}{2\pi} \left(n \ln \zeta - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \ln(\zeta - U_c e^{i\frac{2\pi}{n}k}) \right) \quad (2.39)$$

2.15.6 Transformering av F från ζ -planet till z -planet

Vet man $F(\zeta)$ kan man genom integration finna z -funktionen. Uttrycket som används är

$$\zeta = f^{-1}(z) = \frac{dF}{dz}. \quad (2.40)$$

Nu kan z beräknas. Vid integrationen får man en integrationskonstant som bestäms med hjälp av läget i punkten B. Låter man beskriva läget av z som en funktion av vinkeln, får man reda på kontraktionen genom att låta imaginärdelen gå i limes då vinkeln går mot 0. z beräknas som

$$z = f(\zeta) = \int \frac{dF}{\zeta} = \int \frac{dF}{d\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (2.41)$$

Vi börjar med att derivera F med avseende på ζ .

$$\frac{dF}{d\zeta} = \frac{\alpha U_c h}{2\pi} \left(\frac{n}{\zeta} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\zeta - U_c e^{i\frac{2\pi}{n}k}} \right) \quad (2.42)$$

$$\int \frac{dF}{d\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int \frac{\alpha U_c h}{2\pi} \left(\frac{n}{\zeta^2} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\zeta(\zeta - U_c e^{i\frac{2\pi}{n}k})} \right) d\zeta \quad (2.43)$$

Antag att n är jämnt.

$$\frac{\alpha U_c h}{2\pi} \int \left(\frac{n}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta(U_c - \zeta)} - \frac{1}{\zeta(U_c + \zeta)} \right) d\zeta \quad (2.44)$$

Sänkorna, vilka är varandras spegelbild i origo, grupperas parvis. Betrakta en godtycklig sänka i . Eftersom det är ett jämnt antal poler finns också sänkan $-i$.

$$\int -\frac{1}{\zeta(\zeta - U_c e^{i\frac{2\pi}{n}k})} - \frac{1}{\zeta(\zeta + U_c e^{i\frac{2\pi}{n}k})} d\zeta = \quad (2.45)$$

$$\int \frac{1}{\zeta(U_c e^{i\frac{2\pi}{n}k} - \zeta)} - \frac{1}{\zeta U_c e^{i\frac{2\pi}{n}k} + \zeta} d\zeta =$$

$$\frac{1}{U_c e^{i\frac{2\pi}{n}k}} \left(\ln\left(1 + \frac{\zeta}{U_c e^{i\frac{2\pi}{n}k}}\right) - \ln\left(1 - \frac{\zeta}{U_c e^{i\frac{2\pi}{n}k}}\right) \right) + \text{konstant} =$$

$$\frac{1}{U_c} e^{-i\frac{2\pi}{n}k} \left(\ln\left(1 + \frac{\zeta}{U_c} e^{-i\frac{2\pi}{n}k}\right) - \ln\left(1 - \frac{\zeta}{U_c} e^{-i\frac{2\pi}{n}k}\right) \right) + \text{konstant}$$

Då det är bågen mellan B och C som ska studeras är det lämpligt att substituera

$$\frac{\zeta}{U_c} = e^{i\vartheta} \quad (2.46)$$

i ekvation (2.45).

$$\frac{1}{U_c} e^{-i\frac{2\pi}{n}k} \left(\ln\left(1 + e^{i\vartheta} e^{-i\frac{2\pi}{n}k}\right) - \ln\left(1 - e^{i\vartheta} e^{-i\frac{2\pi}{n}k}\right) \right) + \text{konstant} = \quad (2.47)$$

$$\frac{1}{U_c} e^{-i\frac{2\pi}{n}k} \left(\ln\left(1 + e^{i(\vartheta - \frac{2\pi}{n}k)}\right) - \ln\left(1 - e^{i(\vartheta - \frac{2\pi}{n}k)}\right) \right) + \text{konstant}$$

$$\frac{1}{U_c} e^{-i\frac{2\pi}{n}k} \ln\left(\frac{1 + e^{i(\vartheta - \frac{2\pi}{n}k)}}{1 - e^{i(\vartheta - \frac{2\pi}{n}k)}}\right) + \text{konstant} =$$

$$\frac{1}{U_c} e^{-i\frac{2\pi}{n}k} \ln\left(\frac{\sin(\vartheta - \frac{2\pi}{n}k)}{1 - \cos(\vartheta - \frac{2\pi}{n}k)}\right) + \text{konstant}$$

Summeras bidraget av alla termer erhålls följande uttryck

$$z(\vartheta) = \frac{\alpha h}{2\pi} \left(-ne^{-i\vartheta} + 2 \sum_{k=0}^{n/2-1} e^{-i\frac{2\pi}{n}k} \ln\left(\frac{\sin(\vartheta - \frac{2\pi}{n}k)}{1 - \cos(\vartheta - \frac{2\pi}{n}k)}\right) \right) + c. \quad (2.48)$$

2.15.7 Beräkning av $z(\zeta = U_c)$

Det slutliga gränsvärdet som ska bestämmas är

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \Im[z(\vartheta)] \quad (2.49)$$

Eftersom gränsvärdet bara tar hänsyn till imaginärdelen räcker det med att beräkna imaginärdelen av integrationskonstanten. Då bestäms integrationskonstanten med hjälp av punkt B. Villkoret blir att $\Im z(\pi(1 - 1/n)) = b/2$. Vid insättning är det viktigt att argumentet till logaritmen blir skilt från noll. Detta innebär att vinkeln inte får vara $\pi(1 + 2k)$ radianer, där $k \in \mathbb{Z}$, vilket vid kontroll inte heller visar sig vara fallet. Inför beteckningen

$$w(\vartheta) = -ne^{-i\vartheta} + 2 \sum_{k=0}^{n/2-1} e^{-i\frac{2\pi}{n}k} \ln\left(\frac{1 + e^{i(\vartheta - \frac{2\pi}{n}k)}}{1 - e^{i(\vartheta - \frac{2\pi}{n}k)}}\right), \quad (2.50)$$

2.15. DEN IDEALA KONTRAKTIONSKOEFFICIENTENS BEROENDE AV γ_{21}

så kan z skrivas som

$$z(\vartheta) = \frac{\alpha h}{2\pi} w(\vartheta) + c. \quad (2.51)$$

När uttrycket för z är känt, så är det nästa momentet att beräkna $\Im c$.

$$\Im\left(\frac{\alpha h}{2\pi} w(\pi(1 - 1/n)) + c\right) = h/2 \Leftrightarrow \Im c = h/2 - \frac{\alpha h}{2\pi} \Im w(\pi(1 - 1/n)) \quad (2.52)$$

Slutligen bestäms gränsvärdet

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha h}{2\pi} \Im w(\vartheta) + \Im c \right) = \quad (2.53)$$

$$\frac{\alpha h}{2\pi} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \Im w(\vartheta) + h/2 - \frac{\alpha h}{2\pi} \Im w(\pi(1 - 1/n)) = \frac{\alpha h}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{\pi} (\Im w(\pi(1 - 1/n)) - \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \Im w(\vartheta))} \quad (2.54)$$

Nu återstår det endast att beräkna gränsvärdet $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \Im w(\vartheta)$.

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \Im \left(-n e^{-i\vartheta} + 2 \sum_{k=0}^{n/2-1} e^{-i\frac{2\pi}{n}k} \ln \left(\frac{1 + e^{i(\vartheta - \frac{2\pi}{n}k)}}{1 - e^{i(\vartheta - \frac{2\pi}{n}k)}} \right) \right) = \quad (2.55)$$

$$\pi + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} \Im \left(e^{-i\frac{2\pi}{n}k} \ln \left(\frac{1 + e^{-i\frac{2\pi}{n}k}}{1 - e^{-i\frac{2\pi}{n}k}} \right) \right)$$

2.15.8 Resultat

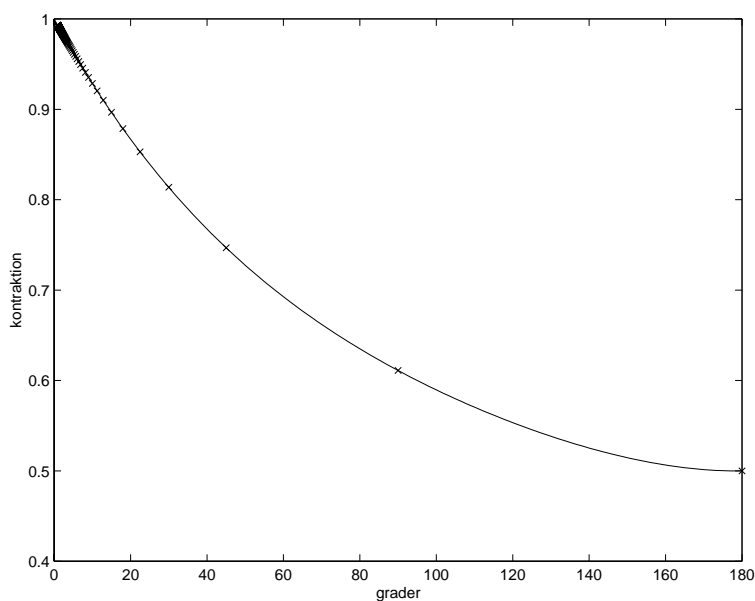
För att få en kontinuerlig funktion $\alpha(\gamma)$, anpassas ett fjärdegradspolynom till de av teorin givna punkterna. Gradtalet valdes genom att ta det lägsta gradtalet, som hade önskade egenskaper och som tillräckligt väl följer punkterna. Polynomets koefficienter är

k	α_k
0	1.0000
1	-0.0077
2	$5.5930 \cdot 10^{-5}$
3	$-2.5597 \cdot 10^{-7}$
4	$5.3510 \cdot 10^{-10}$

där polynomet skrivs som

$$\alpha(\gamma) = \sum_{k=0}^6 \alpha_k \gamma^k \quad (2.56)$$

I figur (2.11) ses det anpassade polynomet.



Figur 2.11 Ett fjärdegradspolynom är anpassat till de teoretiskt beräknade punkterna

2.16 Hur beror kontraktionskoefficienten av γ ?

Med hjälp av simuleringarna och de teoretiska beräkningarna kan beroendet mellan kontraktionskoefficienten och γ approximativt uttryckas som

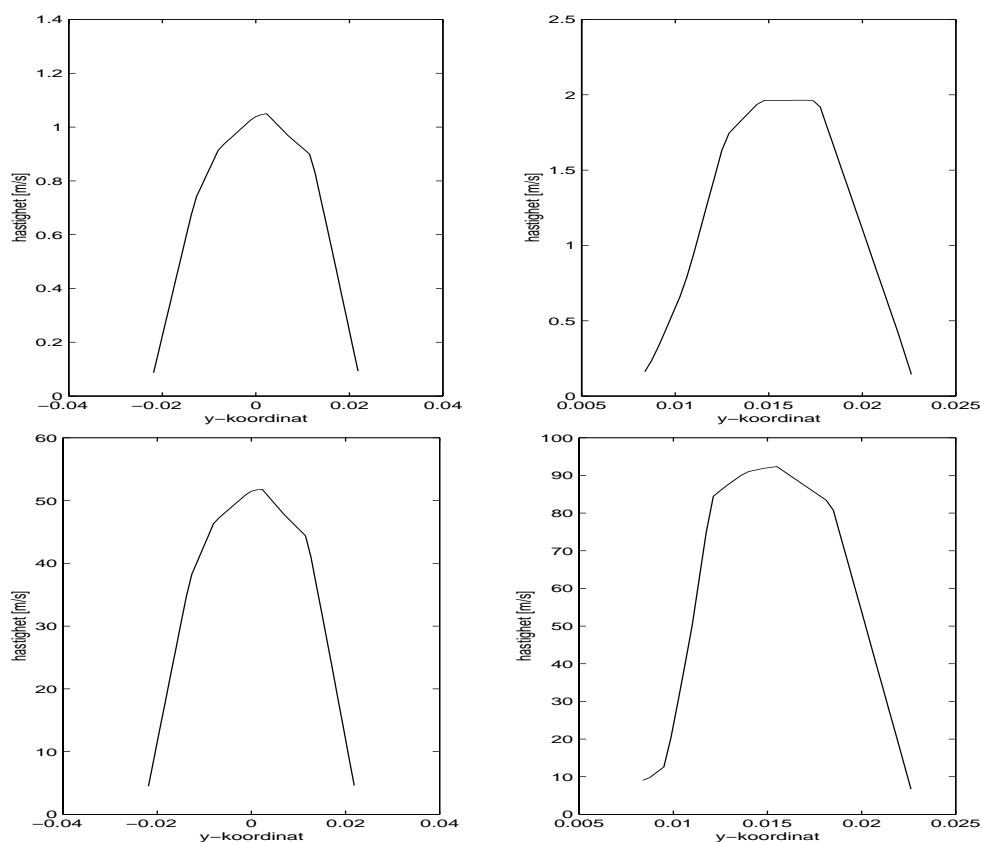
$$\alpha(\gamma) = \sum_{k=0}^6 a_k \gamma^k \quad (2.57)$$

där koefficienterna är,

k	a_k
0	1.0000
1	-0.0042
2	$3.0778 \cdot 10^{-5}$
3	$-1.4086 \cdot 10^{-7}$
4	$2.9447 \cdot 10^{-10}$

2.16.1 Skillnader mellan beräknad och simulerad kontraktion

Vid simulering tillkommer faktorer som påverkar kontraktionen. För det första har väggarna friktion. Det innebär att hastigheten vid väggar är noll medan flödet kan strömma i hög hastighet i den teoretiska beräkningen. En annan stor skillnad är geometrin. I simuleringen är det endast ena sidan som skär in med vinkeln α mot

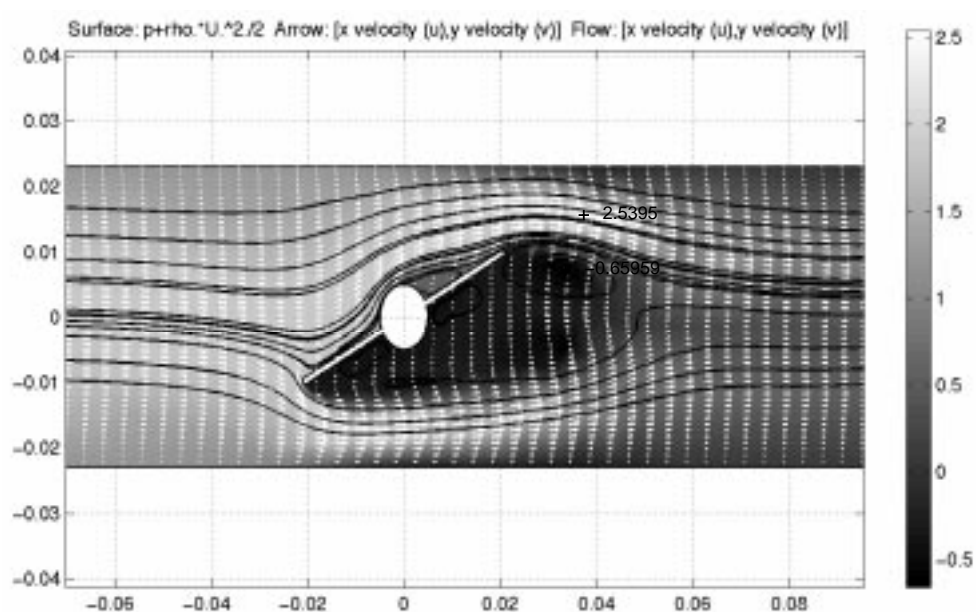


Figur 2.12 Hastighetsprofiler för simulering, där största hastighaten i inloppet valts till 1 m/s. Den vänstra profilen är snittet genom röret vid $x=-0.01$. Alla koordinater i figuren är relaterade till koordinaterna i figur (2.13). Den högra profilen ligger efter den övre öppningen på den x -koordinat där strömningen är i huvudsak parallell. Trottefn öppnad 60° .

öppningen medan den andra sidan begränsas av rörsidan. I den beräknade geometrin utgör strypningen en oändlig förstärkning av hastigheten. I verkligheten kommer det givetvis bara bli en ändlig förstärkning. Vid riktigt små öppningsvinklar handlar det om en faktor 50 för att vid öppen trotteln sjunka ner mot 1.

2.16.2 Simulerade hastighetsprofiler

Strålens kant behöver definieras. Detta behövs för att kunna bestämma kontraktionskoefficient α , som i sin tur ska användas för att beräkna genomströmningen. Definitionen ska stämma någolunda väl med de teoretiska beräkningarna för potentialströmning och att den ska gå att använda för att beräkna flödet. Profilerna i

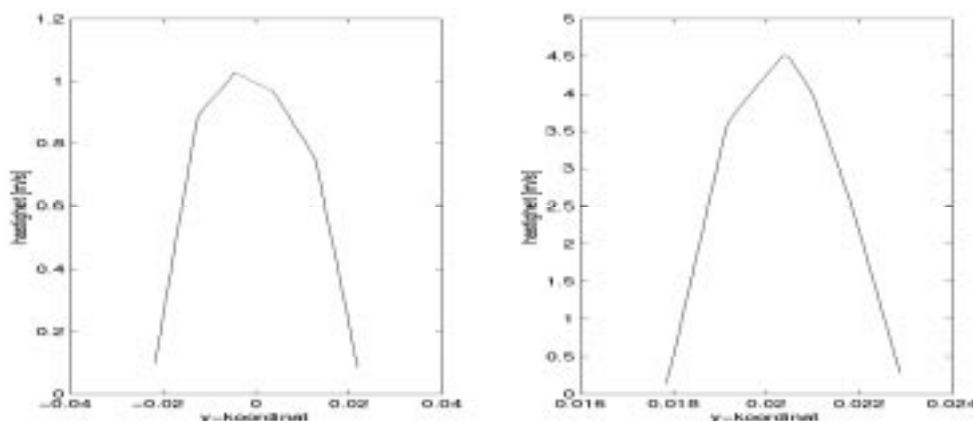


Figur 2.13 Resultat av simulering vid $\beta = 60^\circ$. Gråskalan symboliserar totaltrycket. Det är tydligt att den stora tryckförlusten sker vid areaökningen. Pilarna markerar fluidens hastighet och linjerna är strömlinjer.

(2.16.2) uppvisar ganska lika form. Om man samtidigt studerar simuleringen vid 60 graders öppningsvinkel med maximala in hastigheten 1 m/s ser man att det endast är flödet som passerar då $y \geq 0.011$ som passerar förbi trotteln. Det är intressant att jämföra medelhastigheten i förhållande till maxhastigheten för respektive profil. För den vänstra profilen får man värdet 0.67 och för den högra 0.72 eller 0.62 beroende på om man bara räknar flödet som passerar trotteln eller hela profilen. I det undre fallet är kvoterna 0.68 respektive 0.74. Detta tyder på att det inte är några större skillnader mellan höga och låga hastigheter, när fluiden är inkompressibel. I detta fall är kvoterna 0.66 respektive 0.67. Kvoterna håller sig tillräckligt nära varandra. Definitionen bör lyda: *Strålens kant ska följa strömlinjen som passerar närmst intill trotteln*. Detta betyder alltså att flödehastigheten vid kanten av strålen kan vara betydande. Denna definition stämmer också bra med den teoretiska.

2.16.3 Kontraktion med friktion

Efter mätningar på de tvådimensionella simuleringarna kan man inte upptäcka någon signifikant skillnad vad beträffar strålens egenskaper för olika flödehastigheter. Hur skulle funktionen kunna se ut? Det står helt klart att om $\gamma = 0$ så kan ingen kontraktion uppstå, dvs $\alpha = 1$. Ett antagande som ligger nära till hands att testa är att det inte gör någon större skillnad att lägga på friktion. Detta är dock naivt



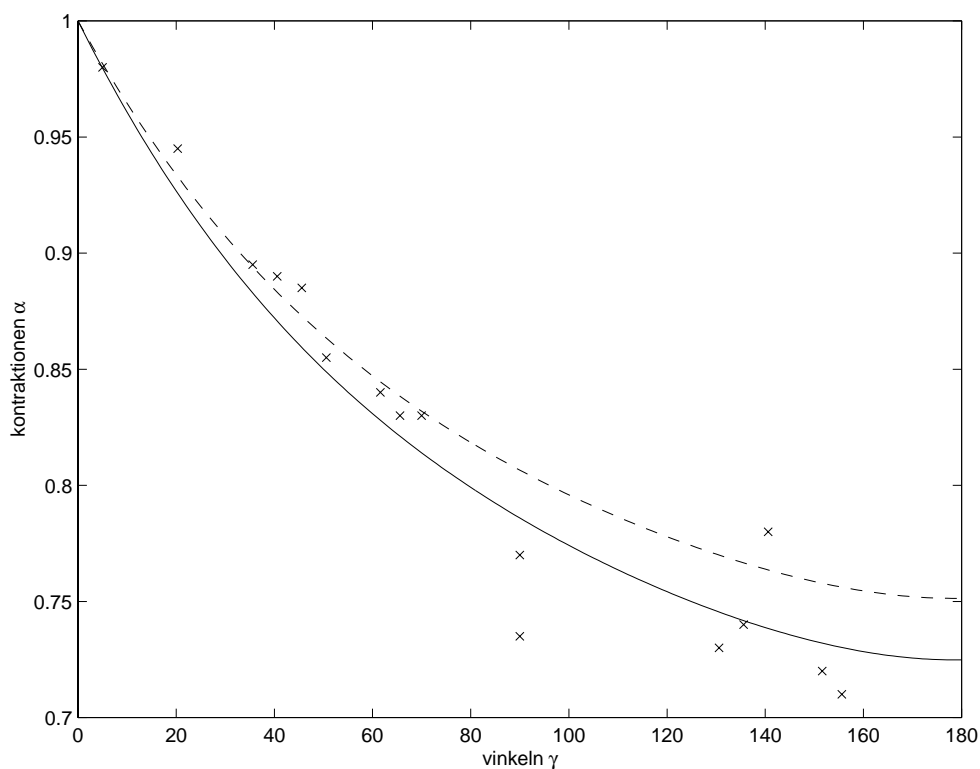
Figur 2.14 Hastighetsprofiler för simulering där största hastigheten i inloppet valts till 1 m/s. Den vänstra profilen visar snittet genom röret vid $x=-0.01$. Den högra profilen ligger efter den övre öppningen på den x -koordinat där strömningen är i huvudsak parallell. Trotteln öppnad 35°

att tro och mätningarna överensstämmer som väntat inte heller. Betraktar man problemet med insikten att det borde finnas ett gränsskikt längs alla fasta väggar som behöver specialstuderas, men att strömningen för övrigt tillräckligt väl kan beskrivas som friktionsfri, kommer man närmare sanningen. Simuleringar visar att det finns ett tydligt gränsskikt vid rörväggen. Detta skikt komprimeras enligt hastighetsprofilerna proportionellt mot areareduceringen. Det enklaste är dock att anse att gränsskiktet är jämntjockt. Detta medför att man underskattar flödet i detta område. Gränsskiktet vid trotteln är obetydligt i jämförelse med mätnoggrannheten. Kalla andelen av öppningen som är gränsskikt för c . Med denna skattning skulle funktionen kunna skrivas som

$$\alpha(\gamma) = c + (1 - c)\alpha_{\text{teoretisk}}(\gamma). \quad (2.58)$$

Bestämmer man c -värdet genom att utnyttja alla punkter i figur (2.15) så får man $c = 0.4497$. Använder man endast de punkter där $\gamma \leq 90^\circ$ får man $c = 0.5027$. Anledningen till att ta upp det sista fallet som ett alternativ är att de värdena verkar ha en betydligt större spridning. Det skulle kunna bero på att friktionen mot trotteln hindrar strömning från att strömma baklänges i röret. Detta får effekten att γ som mest kan uppgå till ca 90° . I fortsättningen används $c = 0.4497$ även för vinklar $\gamma > 90^\circ$, trots avvikelser. Beräknar man polynomet får man

$$\alpha(\gamma) = \sum_{k=0}^6 a_k \gamma^k, \quad (2.59)$$

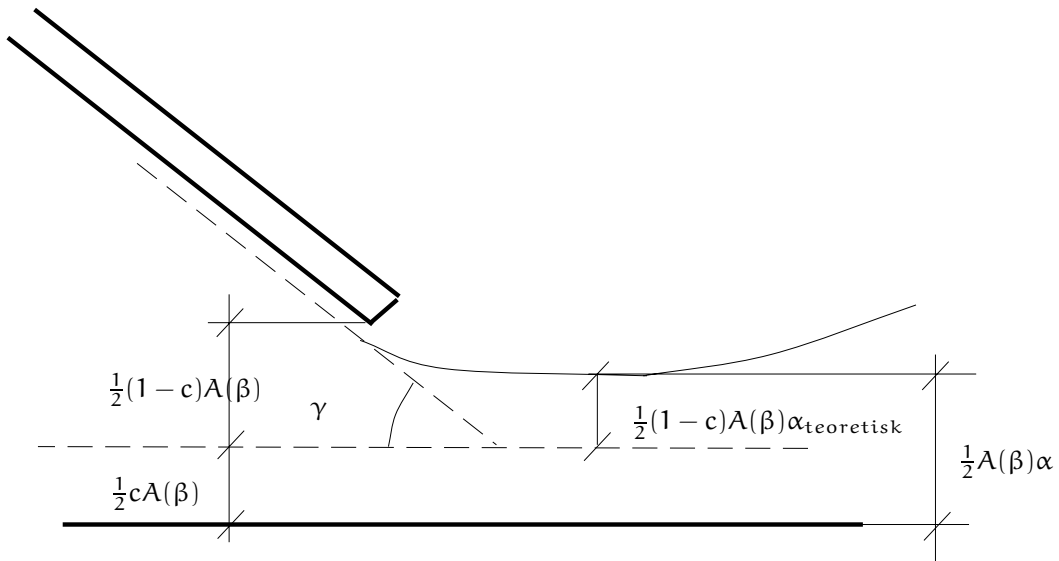


Figur 2.15 Grafen visar kontraktionskoefficientens, α :s, beroende av ändringsvinkel γ . Kryssen markerar uppmätta kontraktioner i simuleringar. Det heldragna polynomet är anpassat efter samtliga punkter medan den sträckade endast anpassats till punkterna för ändringsvinklar mindre än 90° .

där koefficienterna är

k	a_k
0	1.0000
1	-0.0042
2	$3.0778 \cdot 10^{-5}$
3	$-1.4086 \cdot 10^{-7}$
4	$2.9447 \cdot 10^{-10}$

Skulle bestämningen av kontraktionen visa sig mycket betydelsefull finns det många sätt med vars hjälp man kan göra den mer exakt. Exempelvis kan man studera gränsskiktens tjocklek vid trottel och rörvägg. Hur påverkas hastighetsprofilerna då gränsskikten ändrar tjocklek?



Figur 2.16 Kontraktionsmodell. Antag att det finns ett gränsskikt som påverkas av friktion vid väggarna.

2.17 Samband mellan öppningsvinkel β och ändringsvinkel γ

Sambanden som råder mellan öppningsvinkel β och ändringsvinkel γ beror på vägen förbi trotteln. För den övre vägen gäller att

$$\gamma_o(\beta) = 90^\circ - \varphi_s - \beta, \quad (2.60)$$

medan det för den undre vägen gäller att

$$\gamma_{ub}(\beta) = \beta. \quad (2.61)$$

$$\gamma_{uf}(\beta) = 90^\circ + \varphi_s + \beta \quad (2.62)$$

2.17.1 Översidan

För den övre delen på trotteln är det inte svårt att definiera sambandet. Det är helt enkelt den slutna trotteln vinkel till vertikalanplanet plus öppningsvinkeln. Detta gäller bara till $\beta \approx 60^\circ$. För större vinklar kommer kontraktionen över axeln att påverka.

$$\gamma(\beta) = 90^\circ - \varphi_s - \beta \quad (2.63)$$

2.17.2 Undersidan

På undersidan är det mer komplicerat på grund av att kanten på trotteln kommer att börja påverka kontraktionen.

Bakkanten på trotteln

Vid bakkanten på trotteln görs antagandet att strömningen hinner anpassa sig i kantens riktning. Då kan sambandet uttryckas som

$$\gamma(\beta) = \beta. \quad (2.64)$$

Framkanten på trotteln

Vid framkanten på trotteln sker kontraktionen inte från den minsta arean $A(\beta)$, vilket gör att det effektiva α -värdet måste omräknas. Uttrycket för vinkeln blir

$$\gamma(\beta) = 90^\circ + \varphi_s + \beta \quad (2.65)$$

2.17.3 Vilket är sambandet mellan α_u och β

Sambandet mellan α_u och β är

$$\alpha_{ub}(\beta) = \alpha(\gamma_{ub}(\beta)). \quad (2.66)$$

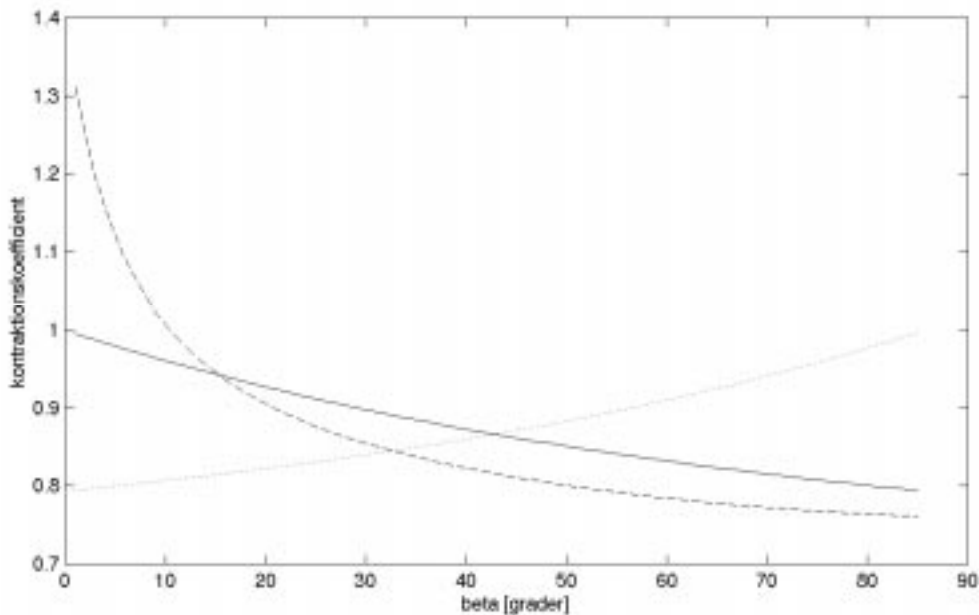
Framkanten ligger $t \frac{\sin(\beta)}{\cos(\varphi_s)}$ längre från rörväggen än bakkanten. Detta gör att ett effektivt α från minsta öppningen blir

$$\alpha_{uf} = \left(\frac{2t \sin(\beta)}{A(\beta) \cos(\varphi_s)} + 1 \right) \alpha(\beta) \quad (2.67)$$

För vinklar över 15.4° kommer framkanten på undersidan att generera strålen med minsta area. För små vinklar, då framkantens kontraktionskoefficient är betydligt större än ett, kommer bakkanten att generera kontraktionen. Vid övergången runt 15° , skulle det vara möjligt att kontraktionen stiger över bakkantens kontraktion förutsatt att strålens minimum antas vid trottels bakkant. I det kompressibla fallet varierar längden med hastigheten, vilket betyder att flödet kan bli ytterst instabilt för vinklar kring 15° . Här skulle det vara intressant att fortsätta med att bestämma strålens längd och försöka förutse under vilka betingelser det eventuellt blir känsligt. Kan man komma nära en kontraktionskoefficient på 1? Kontraktionskoefficienten väljs som den minsta. En eventuell topp av kontraktionen beaktas ej.

$$\alpha_u = \min(\alpha_{uf}, \alpha_{ub}) \quad (2.68)$$

Övre begränsningen för denna modell är maximalt ca 60° . För mindre vinklar ligger stagnationspunkten på framsidan av trotteln. Stagnationspunkten rör sig mot kanten, när vinkeln ökar. Till slut delas flödet av trottels framkant. I detta läge är det endast den bakre kanten, som kan skapa någon kontraktion.



Figur 2.17 Grafen visar hur kontraktionskoefficienten α beror av öppningsvinkeln β . Heldragen linje visar bakkanten av undersidan på trotteln. Den streckade grafen representerar framkanten på undersidan och den prickade slutligen är överkanten på trotteln.

2.18 Utvärdering av 2D-modellen

I detta kapitel har jag huvudsakligen ägnat mig åt kvalitativ jämförelse mellan modell och simulering. Detta på grund av att simuleringarna tog lång tid, vilket omöjliggjorde insamling av ett stort datamaterial att jämföra med. Dessutom är inte alla resultat av simuleringarna konsistenta med fluiddynamiska faktum.

2.18.1 Modellens definitionsområde

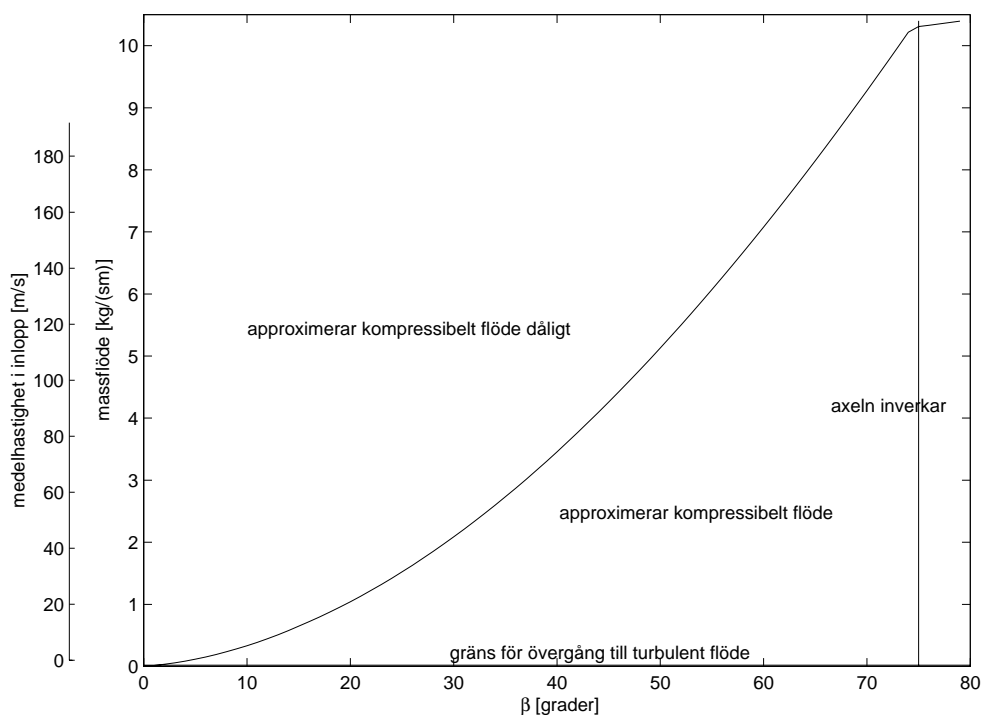
Här följer en analys av modellens fasplan med β och \dot{m} som parametrar. Intressanta händelser som bör ingå i fasplanet är

- övergången mellan laminärt flöde och turbulent flöde i röret.
- övergången mellan laminärt flöde och turbulent flöde vid trotteln.
- när största hastigheten är 1/3 av ljudhastigheten.

Övergång sker för en springa med en godtycklig bredd A vid

$$Re_{kr} = \frac{uD_n}{\nu} = \frac{\dot{m}2D}{\rho D\nu} = 2\frac{\dot{m}}{\mu} \Leftrightarrow \quad (2.69)$$

$$\dot{m} = Re_{kr} \frac{\mu}{2} = 2300 \cdot \frac{18.1 \cdot 10^{-6} \text{ kg}}{2 \text{ ms}} = 0.0208 \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$$

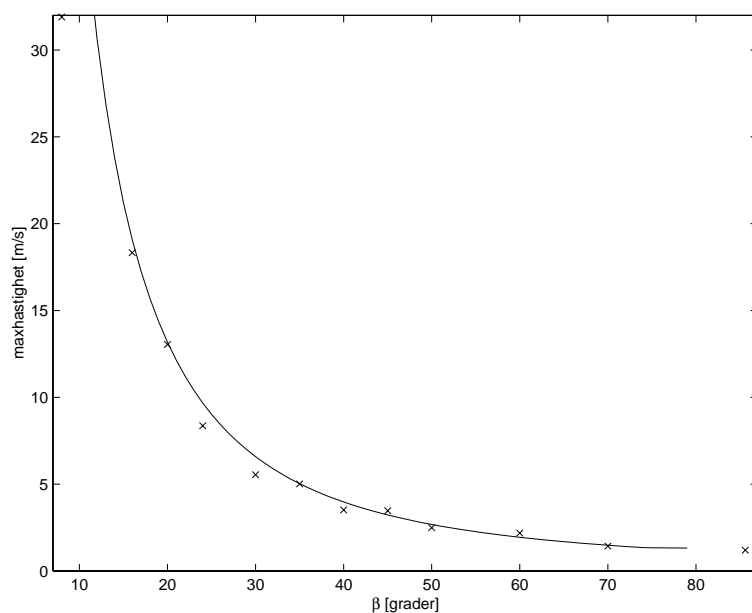


Figur 2.18 Den vertikala linjen markerar när arean vid axeln är lika stor som arean vid trotteln. Eftersom modellen inte tar hänsyn till kontraktion över axeln kommer de beräknade värdena att avvika från simuleringen redan för mindre vinklar, runt 50° . Gränsövergången till turbulent flöde representeras av den horisontella linjen, som ser ut att sammanfalla med x-axeln. Slutsatsen man kan dra är att man ytterst sällan kan använda en laminär modell.

$1/3$ av ljudhastigheten uppnås vid

$$\dot{m} = \frac{0.82}{\hat{u}} \rho A(\beta) \quad (2.70)$$

Betrakta figur (2.18). Den vertikala linjen markerar när arean vid axeln är lika stor som arean vid trotteln. Eftersom modellen inte tar hänsyn till kontraktion över axeln kommer de beräknade värdena att avvika från simuleringen redan för mindre vinklar än 75° . Tittar man på grafen för tryckförlusten (2.21) tycks avvikelserna börja redan runt 50° . Gränsövergången till turbulent flöde i inloppet till trotteln är den horisontella linjen som ser ut att sammanfalla med x-axeln. Betraktar man flödesstorlekarna i en riktig trotteln och tänker sig att den tvådimensionella trotteln är snittet av den riktiga, kan man dra slutsatsen att laminära modeller är ytterst sällan användbara. Till och med inkompressibilitetsvillkoret är svårt att uppfylla för de flesta arbetspunkterna till en turbomotor.



Figur 2.19 Grafen representerar modellens värde. Kryssen är de simulerade värdena. För $\beta = 8^\circ$ är det troligt att avvikelserna beror på att simuleringen inte konvergerat.

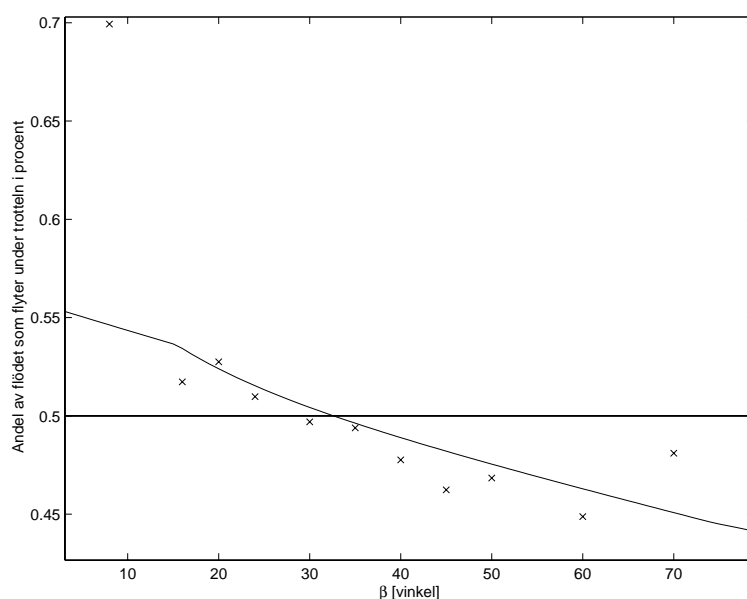
2.18.2 Simuleringens definitionsområde

Det var tyvärr inte lätt att simulera flödet för vinklar under 15° , varför data genererade av geometrin med $\beta = 8^\circ$, ej bör anses vara helt korrekta. Iakttagelser som bekräftar misstankarna är exempelvis att massflödena in, förbi trotteln och ut är olika.

2.18.3 Jämförelse av modell och simulering

Största hastigheten

Intresset för att beräkna den största hastigheten vid trotteln är sekundärt. Det intressanta är emellertid att avgöra vilken typ av strömning, som existerar vid trotteln. Vet man det, kan antaganden göras för att förenkla beräkningarna av andra storheter. Vad grafen (2.19) beträffar är resultatet överraskande bra. Hastigheten ser ut att överrensstämma väl med de simulerade värdena, även för större vinklar än cirka 60° . Förmodligen förändras hastighetsprofilen vid kontraktion över axel så att effekten av felaktig area uppvägs.



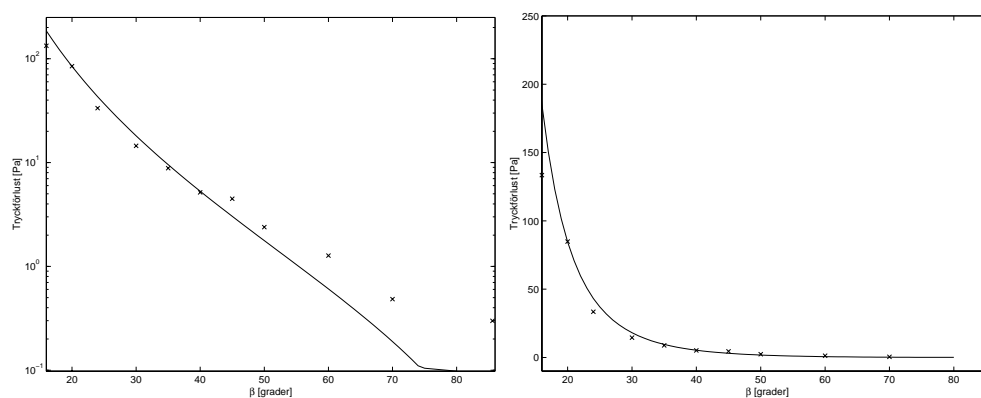
Figur 2.20 Grafen representerar modellens värde. Kryssen är de simulerade värdena. För $\beta = 8^\circ$ är det troligt att avvikelsen beror på att simuleringen inte konvergerat.

Andelen flöde under trottelein

Målet med modellen var bland annat att förklara snedfördelningen. I figuren (2.20) ser man att skärningen med 50 % linjen stämmer mycket väl överrens med simuleringen. Denna övergång sker också i det intervall där både simulering och modell är giltiga. För vinklar strax över 50° bör endast den övre vägen påverkas av axeln. Axeln kontraherar strålen innan den når trottelkanten. Detta innebär att kontraktionen vid kanten reduceras, vilket i sin tur medför att den övre vägen blir större och därigenom släpper igenom flöde lättare. Slutsatsen man kan dra av detta är att andelen flöde under trottelein i simuleringarna borde bli mindre än den beräknade. Vid ännu lite större vinklar kommer axeln på ovansidan att vara begränsande, varför modellen överskattar arean. Vid så stora vinklar är emellertid areareduceringen så liten att beräkningen av kontraktionen är felaktig.

Tryckförlusten

För att inte vilseleda läsaren med den grafiska presentationen avbildas samma punkter och graf i både linjär och logaritmisk skalning. Även i detta fall noteras avvikelser för stora och små vinklar med samma förklaring som tidigare. Slutsatsen av valideringen är att modellen bidrar med information inom framförallt vinklar i intervallet mellan 20° till 50° . Jag tror att modellen stämmer bra för mindre vinklar också, men det kan inte valideras med hjälp av simuleringarna. Det är naturligt att som



Figur 2.21 Visar simulerade och beräknade tryckförluster. Avvikelsen vid 8° är större än vad den ser ut att vara med logaritmisk axel. Denna avvikelse beror förmodligen på att simuleringen inte konvergerat. Vid vinklar över 50° beror avvikelsen framförallt på att axeln inte är modellerad.

nästa steg ge sig i kast med att modellera en riktig trotteln.

Är detta en tillräckligt bra modell för att förutsäga kvantitativa samband på den verkliga trotteln?

2.19 Slutsatser

Flödet är turbulent vid alla förhållanden som normalt råder i en motor. Tryckförlusten över trotteln består till störst del av förluster beroende på areaökning. Areaökningen beräknas som kvoten mellan summan av areorna i kontraktionerna och rörets tvärsnittsarea i utloppet. Kontraktion med hänsyn tagen till fluidens viskositet beräknas genom, ett från simuleringar anpassat uttryck som beror på vinkelskillnaden mellan fluidens flödesriktning in mot begränsningen och fluidens flödesriktning i kontraktionen. Beräkningen av tryckförlusten förklarar hur flödet fördelar sig mellan vägen under trotteln och vägen över trotteln.

Kapitel 3

Studier av 3D-fallet

I detta kapitel använder jag kunskaperna från det tvådimensionella fallet och försöker applicera dem på en riktig trottel. Kapitlets huvuduppgift är att bestämma en metod för att beräkna massflödet förbi trotteln förutsatt att trottelns geometri, gasens egenskaper före trotteln samt trycket efter trotteln är kända. För att begränsa omfattningen av uppgiften studeras inte trottelnaxelns inverkan, vilket inträffar vid vinklar över cirka $\beta = 60^\circ$. För att studera realistiska förhållanden vid trotteln kan gasen inte anses vara inkompressibel.

3.1 Huvudekvationer för kompressibla fluider

Framförallt fyra ekvationer är centrala för beräkningarna i detta kapitel. Första ekvationen uttrycker sambandet mellan tryckkvoten och machtalet.

$$\frac{p_t}{p} = \left(1 + \frac{(\kappa - 1)M^2}{2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (3.1)$$

Andra ekvationen uttrycker samband mellan bland annat massflöde och machtal.

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_t}}{Ap_t} = \frac{\sqrt{\kappa}M}{\left(1 + \frac{(\kappa - 1)M^2}{2}\right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}} \quad (3.2)$$

Den tredje ekvationen är definitionen av förlustkoefficienten för kompressibla flöden

$$K = \frac{p_t - p_e}{p_t - p} \quad (3.3)$$

Slutligen behövs också den inkompressibla förlustkoefficienten för en omedelbar expansion

$$K = \left(1 - \frac{\check{\alpha} C(M, \alpha)}{A} \right)^2, \quad (3.4)$$

där C är en korrektionskoefficient som omvandlar den inkompressibla kontraktionskoefficienten till den kompressibla kontraktionskoefficienten. Formeln kommer från Miller, [9]. Miller skriver att antingen är förlustkoefficienten experimentellt visad av mindre pålitliga källor, eller så bygger koefficienten på den inkompressibla koefficienten, där det inte finns mycket information om effekterna av användning utanför definitionsområdet. Jag har inte heller lyckats visa detta påstående, så det återstår.

3.1.1 Antaganden

Det krävs vissa antaganden om gasen för att kunna härleda ekvation ett och två.

- Flödet är stationärt.
- Flödet är endimensionellt.
- Strömningen är friktionsfri.
- Masskrafterna är försumbara.
- Flödet är adiabatiskt, dvs inget värmeutbyte sker mellan rör och fluid.
- Gasen är ideal.

3.1.2 Härledning av Bernoulli's ekvation för kompressibla fluider

Med hjälp av antaganden om att flödet är stationärt, endimensionellt och friktionsfritt samt att masskrafterna är försumbara kan energiekvationen skrivas som

$$dq = dh + d\left(\frac{u^2}{2}\right). \quad (3.5)$$

Dessutom gäller termodynamikens första huvudsats eftersom flödet är friktionsfritt och därmed reversibelt,

$$dh = dq + \frac{dp}{\rho}. \quad (3.6)$$

Antagandet om att flödet är adiabatiskt innebär att inget värmeutbyte sker, dvs $dq = 0$. Sätt in detta i (3.6) och lös ut dh .

$$dh = \frac{dp}{\rho}. \quad (3.7)$$

Använd detta i ekvation (3.5)

$$0 = \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{u^2}{2}\right). \quad (3.8)$$

Integrerar ekvationen får vi

$$k_1 = \int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2}. \quad (3.9)$$

Nu behövs antagandet om att gasen är ideal, dvs

$$p = \rho RT \quad (3.10)$$

Lägger man därtill att strömningen är reversibel och adiabatisk så gäller isentrop-sambandet

$$p = k\rho^\kappa \quad (3.11)$$

Eftersom flödet strömmar friktionsfritt är processen reversibel. Utifrån detta integrerar man ekvationen längs en strömlinje

$$\int \frac{dp}{\rho} = \int \left(\frac{k}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} dp = k^{\frac{1}{\kappa}} \frac{\kappa}{\kappa-1} p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} \quad (3.12)$$

Energiekvationen gäller nu längs en strömlinje med isentropiskt flöde. Sätter man in resultatet i energiekvationen erhåller man Bernoulli's ekvation för kompressibelt flöde.

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = k_1 \quad (3.13)$$

Konstanten k_1 varierar för olika strömlinjer.

3.1.3 Härledning av den första ekvation (3.1)

Använder man Bernoulli's ekvation samt $a^2 = \kappa \frac{p}{\rho}$ i dels en referenspunkt där gas är i vila och dels i en godtycklig punkt får man

$$\frac{u^2}{2} + \frac{1}{\kappa-1} a^2 = \frac{1}{\kappa-1} a_t^2 \quad (3.14)$$

Delas detta med a^2 uttrycks den lokala ljudhastigheten i det lokala machtalet.

$$\left(\frac{a_t}{a}\right)^2 = \frac{\kappa-1}{2} M^2 + 1 \quad (3.15)$$

Använder man isentropsambandet och formeln för ljudhastigheten kan man omarbete vänsterledet enligt

$$\left(\frac{a_t}{a}\right)^2 = \frac{\kappa \frac{p_t}{\rho_t}}{\kappa \frac{p}{\rho_t} \left(\frac{p_t}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}}} = \left(\frac{p_t}{p}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (3.16)$$

Sätter man in (3.16) i (3.15) så erhålles ekvation (3.1).

3.1.4 Härledning av den andra ekvationen (3.2)

Ekvationen (3.2) härleds från (3.1) genom att utnyttja isentropsambandet och att ljudhastigheten kan skrivas som

$$M = \frac{u}{a} = \frac{\dot{m}}{\rho A \sqrt{\kappa R T}}. \quad (3.17)$$

Börja med ekvation 3.2:s vänsterled.

$$\frac{\dot{m} \sqrt{R T_t}}{A p_t} = \frac{\dot{m}}{\rho A \sqrt{\kappa R T}} \sqrt{\kappa} \frac{\sqrt{\rho R T} \sqrt{\rho R T_t}}{p_t} = \quad (3.18)$$

$$M \sqrt{\kappa} \frac{\sqrt{p} \sqrt{\left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \rho_t R T_t}}{p_t} = M \sqrt{\kappa} \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{\kappa+1}{2\kappa}}$$

Substituera tryckkvoten i högerledet med ekvation (3.1) så erhålls (3.2).

3.2 Areaberäkning i 3D

I ekvation (3.4) ingår strypningens minsta area. Area beror på variabeln β som är trottels öppningsvinkel. Det sökta sambandet är alltså $A(\beta)$, dvs den minsta arean som funktion av trottelvinkeln. Förutom variabeln β beror arean också på dessa konstanter för en specific trottell.

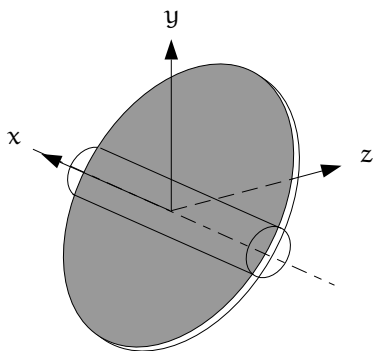
- φ_s den slutna trottels vinkel till vertikalplanet
- D rördiameter
- d axeldiameter
- t tjocklek på trottellplattan

Slutligen finns variabeln β som är trottels öppningsvinkel. det sökta sambandet är $A(\beta)$, dvs den minsta arean som funktion av trottelvinkeln.

3.2.1 Metod

Metoden för areaberäkningen beskrivs i punktform.

1. Finn uttrycket för trottellkanten
 - Beskriv trottellplanet som funktion av β
 - Beskriv röret
 - Bestäm skärningen mellan trottellplanet för $\beta = 0$ och röret som definierar trottellkanten i slutet läge.
 - Roter trottellkanten β grader runt axeln.
2. Beräkna integralen som bestämmer arean.



Figur 3.1 Visar trotteln och axeln trotteln sitter på. Röret som trotteln sitter monterad i gå längs z-axeln.

- Hitta en parametrisering av ytan
- Finn mängden i parameterplanet som avbildas på ytan.
- Beräkna integranden efter variabelbytet till parametrarna
- Integrera funktionen i radiell riktning
- Beräkna numeriskt integralen för den slutliga variabeln

3.2.2 Uttrycket för trottelkanten

Definition av koordinatsystemet

Betrakta figur (3.1). Placera ett koordinatsystem så att origo ligger i centrum av trottelaxeln och i centrum av röret. Låt z-axeln ligga i rörets längsriktning. X-axeln riktas längs trottelaxeln. Tack vare symmetri räcker det med att betrakta trotteln i den första oktanten. I det tredimensionella fallet behövs samma konstanter och samma variabel som var givna i det tvådimensionella fallet. Beräkningarna sker stegvis.

Trottelplanets ekvation $\mathbf{T}(a, x)$

Sätt \mathbf{T} till att beteckna planet för ovansidan på trotteln. Planet kan skrivas som

$$\mathbf{T}(a, x) = \frac{t}{2}\mathbf{n}_O + at_O^{yz} + x\hat{x} \quad (3.19)$$

Vektorerna \mathbf{n}_O och t_O^{yz} behöver bestämmas. Normalen bestäms av trottelvinkeln till vertikalplanet φ .

$$\mathbf{n}_O = (0, \sin(\varphi), -\cos(\varphi)) \quad (3.20)$$

Tangenten till trotteln i yz -planet kan bestämmas genom kryssprodukten mellan $\hat{\mathbf{x}}$ och normalen.

$$\mathbf{t}_O^{yz} = \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{n}_O = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{vmatrix} = (0, \cos(\varphi), \sin(\varphi)) \quad (3.21)$$

Rörets ekvation

Rörets ekvation kan skrivas som

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \quad (3.22)$$

Den slutna trotteln kant, $\partial\mathbf{T}(x)$

Nu kan ett uttryck beräknas för kanten av trotteln, då trotteln är sluten, genom att kräva att kanten ska satisfiera både ekvation (3.19) för vinkeln φ_s och ekvation (3.22).

$$\begin{aligned} \frac{t}{2}(0, \sin(\varphi_s), -\cos(\varphi_s)) + a(0, \cos(\varphi_s), \sin(\varphi_s)) + x(1, 0, 0) = \\ (x, \frac{t}{2}\sin(\varphi_s) + a\cos(\varphi_s), a\sin(\varphi_s) - \frac{t}{2}\cos(\varphi_s)) = (x, \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2}, z) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ekvationerna kan nu användas så att trottelnkantens $\partial\mathbf{T}(x)$ parametriseras av x -koordinaten. Ur ekvationerna nedan beräknar man z -koordinatens beroende av x -koordinaten genom att sätta in uttrycket för a från (3.24) i (3.25).

$$\frac{t}{2}\sin(\varphi_s) + a\cos(\varphi_s) = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2} \quad (3.24)$$

$$a\sin(\varphi_s) - \frac{t}{2}\cos(\varphi_s) = z \quad (3.25)$$

Trotteln kant beskrivs som

$$\partial\mathbf{T}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2} \\ \left(\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2} - \frac{t}{2}\sin(\varphi_s)\right)\tan(\varphi_s) - \frac{t}{2}\cos(\varphi_s) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Trotteln kant, $\partial\mathbf{T}(\beta, x)$

För att gå vidare definieras rotationsmatrisen $\mathbf{R}(\beta)$, som roterar vektorer β grader runt x -axeln. Denna matris ges av

$$\mathbf{R}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Trottelkantens läge kan nu beskrivas för godtycklig öppningsvinkel för ett givet x .

$$\partial\mathbf{T}(\beta, x) = \mathbf{R}(\beta)\partial\mathbf{T}(x) \quad (3.28)$$

Beräkning av derivatan av trottelkanten för framtida bruk

Längre fram kommer även derivatan av trottelkanten med avseende på x att behövas. Vid beräkning av derivatan observerar vi att \mathbf{R} är en konstant med avseende på x , varför matrisen kan brytas ut.

$$\frac{d}{dx}\partial\mathbf{T}(\beta, x) = \mathbf{R}(\beta)\frac{d}{dx}\partial\mathbf{T}(x) = \mathbf{R}(\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2}} \\ -\frac{x \tan(\varphi_s)}{\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2}} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Villkor som den beräknade geometrin genererar

Minsta arean som flödet måste passera genom, är ytan mellan $\partial\mathbf{T}(\beta, x)$ och dess projektion på röret. Kalla denna yta för \mathbf{A} . För att trotteln inte ska ligga utanför röret vid axeln måste man kräva att öppningsvinkeln åtminstone är

$$\check{\beta} = 2 * (\arcsin\left(\frac{t}{d}\right) - \varphi_s) \quad (3.30)$$

3.2.3 Beräkning av ett ytelement A

Nästa mål är att beräkna arean av ett ytelement. För att kunna detta behövs parametrering av ytan. Det är lämpligt att använda x -koordinaten på $\partial\mathbf{T}(\beta, x)$ och r , som betecknar radien i cylindriska koordinater. Låt $\mathbf{f}(x, R)$ vara avbildningen $\mathbf{f} : (x, R) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Funktionen \mathbf{f} beräknas till

$$\mathbf{f}(x, r) = \partial\mathbf{T}(\beta, x) + r \begin{pmatrix} x \\ (\partial\mathbf{T}(\beta, x))_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Bestämning av A_p

Mängden i parameterplanet, som avbildas på arean A , kan bestämmas genom uppdelning i två deluppgifter. För det första bestäms i vilket intervall x tillåts variera. Därefter bestäms för givet x vilka r som är tillåtna. Parametern x sammanfaller med x -koordinaterna för punkterna på trottelkanten. Så som geometrin är definierad, vet vi att $0 \leq x \leq \hat{x}$. Det viktigaste är att bestämma det största x :et, \hat{x} . Detta antas då $(\partial\mathbf{T})$ skär in i axeln, dvs när

$$(\partial\mathbf{T})_y^2 + (\partial\mathbf{T})_z^2 = \frac{d^2}{4} \quad (3.32)$$

Denna ekvation är oberoende av β , så det räcker med att använda ekv (3.29). Börjar med att sätta $k = \frac{t}{2}(\sin(\varphi_s)\tan(\varphi_s) + \cos(\varphi_s))$. Om $\partial\mathbf{T}$:s y-koordinat också kallas för y beräknas densamma från nedanstående ekvation.

$$(1 + \tan^2(\varphi_s))y^2 - 2k\tan(\varphi_s)y + k^2 - \frac{d^2}{4} = 0 \quad (3.33)$$

Den positiva lösningen till ekvationen kallas \hat{y} . Nu kan \hat{x} beräknas som

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{D^2}{4} - \hat{y}^2}; \quad (3.34)$$

Undre gränsen för parametern är $r = 0$ eftersom f definierades som trotteltkantens koordinater plus en komponent som beror på r . Den övre gränsen bestäms av att ytan skär röret för detta r .

$$(\partial\mathbf{T}(\beta, \mathbf{x}))_x + r\mathbf{x} + (\partial\mathbf{T}(\beta, \mathbf{x}))_y(1 + r) = \frac{D^2}{4} \quad (3.35)$$

Mängden kan alltså skrivas som

$$A_p = \{(x, r); 0 \leq x \leq \hat{x}, 0 \leq r \leq \hat{r}(x)\}. \quad (3.36)$$

Integranden efter variabelbytet till (x, r)

Integralen beräknas enligt

$$\iint_A dA = \iint_{A_p} \left| \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x} \times \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial r} \right| dx dr. \quad (3.37)$$

Nu beräknas de partiella derivatorna $\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}$ och $\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial r}$

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x} = \frac{d}{dx} \partial\mathbf{T}(\beta, \mathbf{x}) + r \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d}{dx}(\partial\mathbf{T}(\beta, \mathbf{x}))_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial r} = \begin{pmatrix} x \\ (\partial\mathbf{T}(\beta, \mathbf{x}))_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Beräkning av ytnormalen \mathbf{n}_A .

$$\mathbf{n}_A = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ (\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x})_x & (\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x})_y & (\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x})_z \\ x & (\partial\mathbf{T}(\beta, \mathbf{x}))_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -(\partial\mathbf{T}(\beta, \mathbf{x}))_y (\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x})_z \\ x (\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x})_z \\ (\partial\mathbf{T}(\beta, \mathbf{x}))_y (\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x})_x - x (\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x})_y \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Beräkning av dubbelintegralen.

$$\int \left(\int_0^{\hat{r}(x)} |\mathbf{n}_A| dr \right) dx = \int \left(\int_0^{\hat{r}(x)} \sqrt{\sum_{i \in \{x,y,z\}} (\mathbf{n}_A)_i^2} dr \right) dx = \quad (3.41)$$

Det principiella r -beroendet av integranden är $\sqrt{(ar)^2 + 2br + c^2}$. För att förenkla formlerna införs beteckningen $\partial \mathbf{T} = \partial \mathbf{T}(\beta, x)$. Koefficienterna beräknas som

$$\mathbf{a} = ((\partial \mathbf{T})_y - x \frac{d}{dx} (\partial \mathbf{T})_y) \quad (3.42)$$

$$\mathbf{b} = ((\partial \mathbf{T})_y \frac{d}{dx} (\partial \mathbf{T})_x - x \frac{d}{dx} (\partial \mathbf{T})_y) ((\partial \mathbf{T})_y - x \frac{d}{dx} (\partial \mathbf{T})_y) \quad (3.43)$$

$$c^2 = ((\partial \mathbf{T})_y \frac{d}{dx} (\partial \mathbf{T})_x - x \frac{d}{dx} (\partial \mathbf{T})_y)^2 + (x \frac{d}{dx} (\partial \mathbf{T})_z)^2 + ((\partial \mathbf{T})_y \frac{d}{dx} (\partial \mathbf{T})_z)^2 \quad (3.44)$$

Integration i radiell riktning

Värdet av den inre integralen är $A(x)$, vilken kan beräknas som

$$A(x) = \int_0^{\hat{r}(x)} \sqrt{(ar)^2 + 2br + c^2} dr = \quad (3.45)$$

$$\frac{1}{a} \left[\frac{1}{2} \left(ar + \frac{b}{a} \right) \sqrt{(ar)^2 + 2br + c^2} + \frac{1}{2} \left(c^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln \left| ar + \frac{b}{a} + \sqrt{(ar)^2 + 2br + c^2} \right| \right]_0^{\hat{r}(x)}$$

3.2.4 Indelning

Avsikten med att dela upp arean är att varje delyta ska ha så pass likartade egenskaper att kunskaperna från den tvådimensionella trotteln kan användas. Önskvärda egenskaper är att geometrin i snittet är liknande den för det tvådimensionella fallet. Andra egenskaper som är önskvärda är att area och kontraktionskoefficient är väldefinierade för varje delyta. Ett smalt snitt av trotteln för $x = 0$ är i princip det studerade snittet i det tvådimensionella fallet, varför det är lämpligt att det snittet ingår bland delytorna. En tänkbar areaindelning är uppdelning av x i delintervall. x -sträckan bör ej indelas i lika delar, eftersom en liten förändring i x , då x är stor, ger stora förändringar av intressanta variabler. Det är lämpligare att dela upp sträckan längs kanten på trotteln ekvidistant istället. Antag, att vi vill dela in sträckan i n stycken intervall. Kalla x -koordinaterna för startpunkten på sträcka i för x_i . Detta gör att $x_{n+1} = \hat{x}$. För att beräkna x_n utan att göra allt för mycket jobb, approximeras ellipsen med en cirkel. Då beräknas x_n till

$$x_i = \frac{D}{2} \sin \left(\frac{i-1}{n} \arcsin \left(\frac{2\hat{x}}{D} \right) \right). \quad (3.46)$$

3.2.5 Approximation av delytan i 's area

Beräkning av ett areaelement, A_i , kan göras mer eller mindre exakt. Funktionen $b(\beta, \mathbf{x})$ är dock av så pass snäll karaktär att en rektangulär uppskattning duger bra. Man evaluerar funktionen på mitten och multiplicerar med avståndet mellan de \mathbf{x} , som avgränsar arean.

$$A_i(\beta) = A(\beta, \frac{x_{i+1} + x_i}{2})(x_{i+1} - x_i) \quad (3.47)$$

3.2.6 Den totala arean

Den totala arean bildas genom att summera över alla delytor och sedan multiplicera med fyra för att ta hänsyn till att uppdelningen bara gäller den första oktanten.

$$A(\beta) = 4 \sum_{i=1}^n A_i(\beta) \quad (3.48)$$

3.3 Samband mellan öppningsvinkel β och vinkelskillnaden γ

I det tvådimensionella fallet baserar sig γ på vinkeln mellan flödet vid kontraktion och maximala avvikelsen av flödet före trotteln. I det tredimensionella fallet kompliceras resonemanget av ett antal faktorer. För det första blir strömningarna tredimensionella så att diskretisering i tvådimensionella snitt är svåra att tillämpa. Jag har dock gjort ett försök att dela upp strypningen i ett antal delytor. Det finns uppenbara risker att snittens flöde är korrelerade på sätt, som ej undersökts. För att bestämma avlänkingsvinkeln behöver riktningen \mathbf{u} flödet har före trotteln samt den kontraherade ytans normalriktning \mathbf{n}_c definieras och beräknas.

3.3.1 Flödesriktning före trotteln

Först och främst måste flödet strömma längs trotteln ut mot kanten. Det är betydligt svårare att avgöra under vilken vinkel strömningen når kanten i trottelpplanet. I snittet mitt genom röret är det klart att vinkeln mellan flödesriktningen och kanten är rät i trottelpplanet. Den enklaste utvidgningen är att anta detsamma för samtliga snitt. Villkoren blir att $\mathbf{u} \perp \mathbf{n}_O$ samt att $\mathbf{u} \perp \frac{d}{dx} \partial \mathbf{T}(\beta, \mathbf{x})$. Sätt $\mathbf{u} = (a, b, 1)$. Lös ut b ur den första ekvationen

$$(0, \sin(\varphi), -\cos(\varphi)) \cdot (a, b, 1) = 0 \Leftrightarrow \quad (3.49)$$

$$b = \cot(\varphi) = \cot(\varphi_s + \beta),$$

och a ur den andra ekvationen.

$$\frac{d}{dx} \partial \mathbf{T}(\beta, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \quad (3.50)$$

$$\alpha = -\frac{\left(\frac{d}{dx}\partial\mathbf{T}(\beta, \mathbf{x})\right)_y \cot(\varphi_s + \beta) + \left(\frac{d}{dx}\partial\mathbf{T}(\beta, \mathbf{x})\right)_z}{\left(\frac{d}{dx}\partial\mathbf{T}(\beta, \mathbf{x})\right)_x}$$

3.3.2 Normalen till tvärsnittsytan i kontraktionen

Det enklaste antagandet i detta fall är att den minsta begränsade areans normal sammanfaller med kontraktionsytans normal. Om det inte bildats någon kontraktion skulle tryckförlusten blivit minst under ett vinkelrätt flöde. Detta antagande ger följdfrågor. Hur ser den kontraherade ytan ut under detta antagande? Kan ytan hamna utanför röret? Är det möjligt att kontraktionsytorna från två olika deltytor överlappar varandra?

Hur ser snittet av en delyta ut?

En uppfattning om utseendet av den kontraherade ytan fås genom att betrakta den mittersta strålen i ett strålnippe genom en delyta. För att approximera hur mycket en strålen måste krökas för att inte passera röväggen, beräknas avståndet till röväggen i samma riktning, som flödesriktningen i mitten av öppningen. I kapitlet om areaberäkningen finns uttrycket för \mathbf{n}_A (3.40) som funktion av r och x . Nu utvärderas den vektorvärda funktionen i punkterna

$$\left(x, r = \frac{1}{2}\hat{r}(x)\right) \quad (3.51)$$

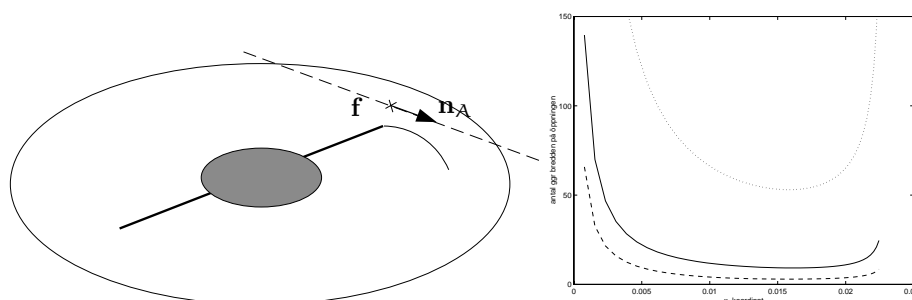
Avståndet som ska beräknas visas i figur (3.2), mellan pilens startpunkt och den punkt som pilen pekar ut på röret. Avståndet informerar om den fria längden, f , efter öppningen innan huvuddelen av flödet måste krökts. Med hjälp av (3.31) uttrycks

$$\left(\left(\mathbf{f}\left(x, r = \frac{1}{2}\hat{r}(x)\right)\right)_x + f \cdot \left(\mathbf{n}_A\left(x, r = \frac{1}{2}\hat{r}(x)\right)\right)_x\right)^2 + \quad (3.52)$$

$$\left(\left(\mathbf{f}\left(x, r = \frac{1}{2}\hat{r}(x)\right)\right)_y + f \cdot \left(\mathbf{n}_A\left(x, r = \frac{1}{2}\hat{r}(x)\right)\right)_y\right)^2 = \frac{D^2}{4}$$

I figur (3.3) visas resultatet av beräkningen för tre olika vinklar. Då $x = 0$ kommer graferna att gå mot oändligheten. Grafernas minimum är 3, 9 respektive 53. Det är intressant att notera att lösningarna till ekvation (3.52) är symmetriska kring noll. Betraktar man planet som spänns upp av normalen och y-axeln kommer punkten mitt i öppningen att dela avståndet mellan ellipsens(rörets) skärningspunkter med linjen mitt itu. Flödet tvingas böjas av snävare för stora öppningsvinklar men vid ca 60° kommer axeln att utgöra begränsningen, varför problemet inte behöver beaktas.

Slutsatsen av denna undersökning är att öppningarna inte är riktade mot rörväggarna i någon större omfattning. Det borde gå att använda den tvådimensionella modellen där väggbegränsningen är en rät linje istället för en del av en ellips.



Figur 3.2 Visar snittet genom trotteln parallellt med flödet i överkanten med trotteln.

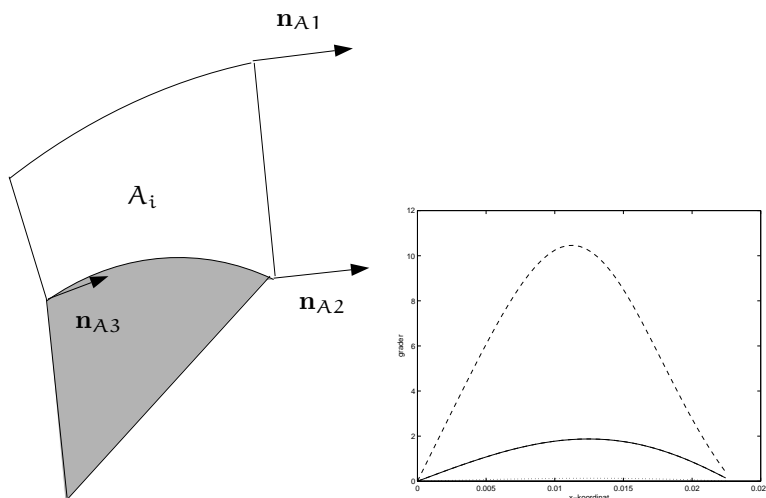
Figur 3.3 Grafen visar avståndet till röv väggen i från mitt av öppningen i normalriktning till den begränsande ytan. Avståndet är angivet i antalet breddar på öppningen. Den sträckade markerar 60° grader, den heldragna 30° och den prickade 10° .

Feldiskussion

Ytterligare problem som uppstår vid överföring av den tvådimensionella modellen till den tredimensionella modellen är att strålarna i respektive delyta divergerar. Detta kan medföra att om kontraktionen sker efter ett större avstånd kan flöde i sidled fylla upp den ökade ytan och på så sätt minska effekten av kontraktionen. Eftersom min modell inte innehåller någon beskrivning av längden av kontraktionen kommer detta fel inte att beaktas. Normalriktningen till den kontraherade ytan kan bara bestämmas om ytan är känd. Enligt undersökningarna ovan borde ytan vara vinkelrät mot röv väggen och ligga på det ställe där flödet är parallellt. Vid tillräckligt liten krökning kan kurvan approximeras med en linje likt den tvådimensionella modellen. Ju större krökning desto större blir flödets överskattning men å andra sidan underskattas flödet när flödet divergerar. En närmare undersökning om storlekarna på felen återstår.

Vilken normal ska användas?

Om uppskattningen är tillräckligt bra innebär det att den kontraherade ytans normal och normalen till ytan som begränsas av trotteln skulle vara parallella. Problemet är att ingen av de två ytorna är plan, varför det återstår att göra ett representativt val av normalen. Det finns många alternativ. Till exempel kan man ta normalen på trottelnkanten, normalen mitt i ytan eller något medelvärde av alla eller en delmängd av normaler på varje delyta. I det tvådimensionella fallet är alla dessa alternativ likvärdiga. Det kan därför vara motiverat att studera hur stor spridning normalerna har inom en delyta.



Figur 3.4 Figuren visar de normaler som avviker mest från varandra.

Figur 3.5 Figuren visar skillnaden i vinkel mellan normalen vid trottelkanten, \mathbf{n}_{A2} , och normalen vid rörväggen, utefter samma radie, \mathbf{n}_{A1} . Detta betyder att felet inte går att undvika genom att förfina indelningen. Graferna är genererade för $\beta = 10^\circ$, $\beta = 30^\circ$ respektive $\beta = 60^\circ$ uppräknat underifrån.

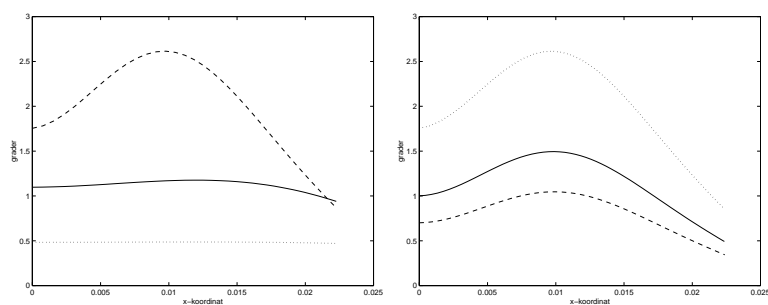
Vinkelskillnader för normaler i en delyta

Den maximala avvikelserna mellan riktningar hos normaler inom en delyta är mindre än summan av vinkelskillnaden mellan \mathbf{n}_{A3} och \mathbf{n}_{A2} och vinkelskillnaden mellan \mathbf{n}_{A2} och \mathbf{n}_{A1} . Summan blir emellertid ganska exakt den maximala avvikelserna, vilket innebär att de tre normaler som betraktas i stort sett ligger i samma plan, där \mathbf{n}_B är den mellersta. Skillnaden i radiell led är för de flesta öppningsvinklar den dominerande, enligt figurerna. Det är också denna avvikelse som är oberoende av indelning och som därmed ej kan undvikas. För stora vinklar kan avvikelserna i radiell led bli betydande, och förmodligen påverka resultatet.

Fotpunkten för den normal som kommer att användas är mittpunkten på trottelkanten. Motiveringen till valet av en normal på trottelkanten är att det flöde som passerar nära trottelkanten kommer att inverka mest på strålens form. Valet av mittpunkten beror på att den representerar övriga normaler på trottelkanten bättre än normalerna i hörnen av ytan.

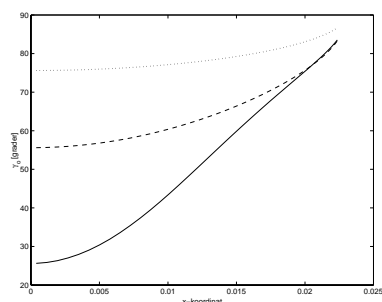
Mittpunkterna i intervallen behövs. Dessa kan approximeras med god noggrannhet av $x_{mi} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Med detta valet kan avlänkingsvinkeln γ beräknas för varje intervall ovan trotteln som

$$\gamma_o = 90 - \arccos\left(\frac{\mathbf{r}_o \cdot \mathbf{u}_o}{|\mathbf{r}_o||\mathbf{u}_o|}\right). \quad (3.53)$$



Figur 3.6 Den vänstra bilden visar skillnaden i vinkel mellan normalen vid trottelkanten inom en uppdelning, dvs skillnaden mellan \mathbf{n}_{A3} och \mathbf{n}_{A2} . Här är halva trottelöppningen uppdelad i 40 intervall. Graferna är genererade av 10° , 30° respektive 60° uppräknat underifrån.

Figur 3.7 Dessa grafer beskriver samma vinkel som föregående figur. Här har samtliga grafer avbildats för vinkeln $\beta = 60^\circ$, men indelningen har varierats. Graferna representerar en uppdelning på 100, 70 och 40 intervall nerifrån och upp.



Figur 3.8 Figuren visar vinkeln γ för ovsidan av trotteln som funktion av läget x . Graferna är genererade av 10° , 30° respektive 60° uppräknat uppifrån.

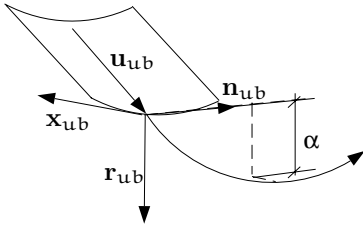
3.3.3 Avlänkningsvinkeln under trotteln

På undersidan kompliceras uttrycken likt det tvådimensionella fallet av att framkanten kan generera den minsta kontraherade ytan. Indelningen är gjord utefter bakkanten på trottelns undersida.

Baksidan

För undersidans bakkant kan vi tillämpa samma metoder som för översidan. Bilda en uppdelning med hjälp av parametern x . Sedan används mittpunkten genererad av x_m på varje delintervall. Här evalueras avståndet till rörväggen, den radiella riktningen samt hastigheten \mathbf{u}_{ub} in mot öppningen. Sedan används \mathbf{u}_{ub} och \mathbf{r}_{ub}

3.3. SAMBAND MELLAN ÖPPNINGSVINKEL β OCH VINKELSKILLNADEN γ 49



Figur 3.9 Figuren visar undersidans bakkant på trotteln.

för att bestämma γ_{ub} . \mathbf{u}_{ub} bestäms av att $\mathbf{u}_{ub} \perp \mathbf{x}_{ub}$ och att $\mathbf{x}_{uf} + a\mathbf{u}_{ub} = \mathbf{x}_b$ för något a . Sätt $\mathbf{u}_{ub} = (b, c, 1)$

$$\mathbf{u}_{ub} \cdot \mathbf{x}_{ub} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(b, c, 1) \cdot \left(\left(\frac{d}{dx} \partial \mathbf{T}(x_m) \right)_x, - \left(\frac{d}{dx} \partial \mathbf{T}(x_m) \right)_y, - \left(\frac{d}{dx} \partial \mathbf{T}(x_m) \right)_z \right) = 0 \quad (3.54)$$

Framsidan på trotteln undersida i stängt läge bestäms av uttrycket

$$\partial \mathbf{T}_{uf}(x) = \begin{pmatrix} x \\ -\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2} \\ -\left(\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{t}{2} \sin(\varphi_s)\right) \tan(\varphi_s) - \frac{t}{2} \cos(\varphi_s) \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Den andra ekvationen blir

$$\partial \mathbf{T}_{uf}(x) + a * (b, c, 1) = \partial \mathbf{T}_{ub}(x_m). \quad (3.56)$$

De obekanta är x, a, b, c och de fyra ekvationerna är

$$\left. \begin{aligned} b - c \left(\frac{d}{dx} \partial \mathbf{T}(x_m) \right)_y - \left(\frac{d}{dx} \partial \mathbf{T}(x_m) \right)_z &= 0 \\ x + ab &= \left(\partial \mathbf{T}(x_m) \right)_x \\ -\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2} + ac &= -\left(\partial \mathbf{T}(x_m) \right)_y \\ -\left(\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{t}{2} \sin(\varphi_s)\right) \tan(\varphi_s) - \frac{t}{2} \cos(\varphi_s) + a &= -\left(\partial \mathbf{T}(x_m) \right)_z \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

Jag löser ut c ur den första ekvationen och a ur den sista och sätter in resultaten i den andra och tredje ekvationen.

$$c = \frac{b - \left(\frac{d}{dx} \partial \mathbf{T}(x_m) \right)_z}{\left(\frac{d}{dx} \partial \mathbf{T}(x_m) \right)_y}$$

$$a = \left(\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{t}{2} \sin(\varphi_s) \right) \tan(\varphi_s) + \frac{t}{2} \cos(\varphi_s) - \left(\partial \mathbf{T}(x_m) \right)_z$$

Det nya ekvationssystemet blir

$$\left. \begin{aligned} x + \left(\left(\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{t}{2}\sin(\varphi_s) \right) \tan(\varphi_s) + \right. \\ \left. \frac{t}{2}\cos(\varphi_s) - (\partial\mathbf{T}(\mathbf{x}_m))_z \right) \mathbf{b} = (\partial\mathbf{T}(\mathbf{x}_m))_x \\ - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2} + \left(\left(\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{t}{2}\sin(\varphi_s) \right) \tan(\varphi_s) + \right. \\ \left. \frac{t}{2}\cos(\varphi_s) - (\partial\mathbf{T}(\mathbf{x}_m))_z \right) \left(\frac{\mathbf{b} - \left(\frac{d}{dx}\partial\mathbf{T}(\mathbf{x}_m)\right)_z}{\left(\frac{d}{dx}\partial\mathbf{T}(\mathbf{x}_m)\right)_y} \right) = -(\partial\mathbf{T}(\mathbf{x}_m))_y \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

Ur ekvationerna elimineras \mathbf{b} . Ekvationens utseende förenklas av införandet av följande konstanter.

$$k_0 = 1 + \frac{\left(\frac{d}{dx}\partial\mathbf{T}(\mathbf{x}_m)\right)_z}{\left(\frac{d}{dx}\partial\mathbf{T}(\mathbf{x}_m)\right)_y} \tan(\varphi_s) = 1 + (\tan(\varphi_s))^2$$

$$k_1 = \frac{1}{\left(\frac{d}{dx}\partial\mathbf{T}(\mathbf{x}_m)\right)_y}$$

$$k_2 = \frac{(\partial\mathbf{T}(\mathbf{x}_m))_x}{\left(\frac{d}{dx}\partial\mathbf{T}(\mathbf{x}_m)\right)_y} - \tan(\varphi_s).$$

$$\left(\frac{t}{2}\sin(\varphi_s)\tan(\varphi_s) + \frac{t}{2}\cos(\varphi_s) - (\partial\mathbf{T}(\mathbf{x}_m))_z \right) + (\partial\mathbf{T}(\mathbf{x}_m))_y$$

Då kan ekvationen skrivas som

$$k_0 \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x^2} = k_2 - k_1 x \quad (3.59)$$

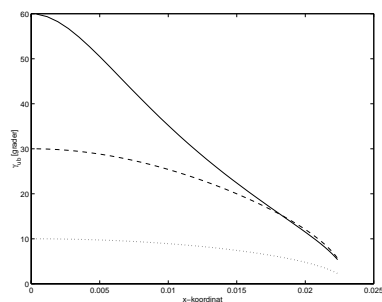
eller efter kvadrering

$$(k_0^2 + k_1^2)x^2 - 2k_1 k_2 x + k_2^2 - \left(\frac{k_0 D}{2}\right)^2 = 0. \quad (3.60)$$

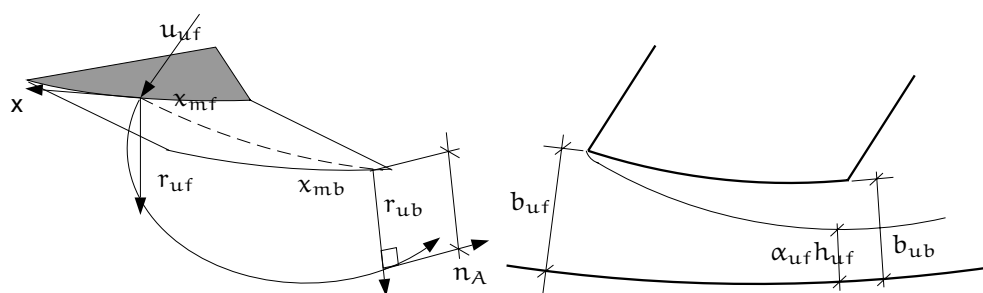
Nu kan samtliga obekanta beräknas. Framförallt var det $\mathbf{u}_{\mathbf{ub}}$ som skulle beräknas. Avlänkingsvinkeln $\gamma_{\mathbf{ub}}$ beräknas ur

$$\gamma_{\mathbf{ub}} = 90 - \arccos\left(\frac{\mathbf{u}_{\mathbf{ub}} \cdot \mathbf{r}_{\mathbf{ub}}}{|\mathbf{u}_{\mathbf{ub}}||\mathbf{r}_{\mathbf{ub}}|}\right) \quad (3.61)$$

3.3. SAMBAND MELLAN ÖPPNINGSVINKEL β OCH VINKELSKILLNADEN γ_{51}



Figur 3.10 Figuren visar vinkeln γ_{ub} som funktion av läget x . Graferna är genererade av 10° , 30° respektive 60° uppräknat nerifrån.



Figur 3.11 Den vänstra figuren visar geometrin för en delyta på undersidan av trotteln.

Figur 3.12 Den högra figuren visar en skärning på undersidan av trotteln.

Framsidan

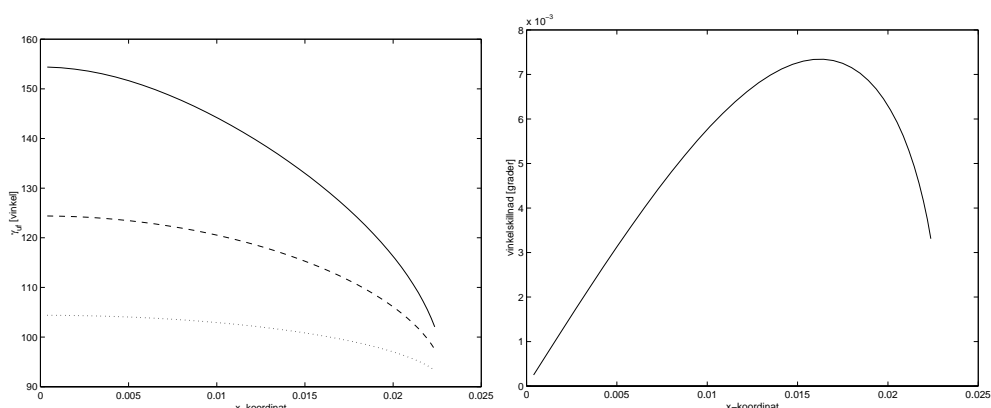
Betraktar man ett intervall och försöker räkna på hur framkanten påverkat flödet, ställs man direkt inför frågan, var på framsidans kant det flöde, som passerar den betraktade ytan, har kommit ifrån? I den tvådimensionella simuleringen kontrahe-
rade strålen från framkanten bakom den bakre kanten. Detta betyder att man bör använda $\mathbf{r}_{ub}(x_{mf})$ istället för $\mathbf{r}_{uf}(x_{mf})$ för att beräkna γ_{uf} . \mathbf{u}_{uf} måste beräknas innan beräkningen av γ_{uf} kan utföras. Villkoren är som tidigare att $\mathbf{u}_{uf} \perp \mathbf{n}_T$ och $\mathbf{u}_{uf} \perp \frac{d}{dx} \mathbf{T}(x_{mf})$. Sätt $\mathbf{u}_{uf} = (\mathbf{a}, -1, \mathbf{b})$. Första villkoret ger

$$\mathbf{b} = -\tan(\varphi_s). \quad (3.62)$$

Den andra ekvationen ger

$$\mathbf{a} = \frac{x_{mf}}{\sqrt{(\frac{D}{2})^2 - x_{mf}^2}} (1 + (\tan(\varphi_s))^2) \quad (3.63)$$

Multiplitera sedan med rotationsmatrisen för att få den aktuella \mathbf{u}_{uf} .



Figur 3.13 Den vänstra figuren visar vinkeln γ_{ub} som funktion av läget x . Graferna är genererade av 10° , 30° respektive 60° uppräknat nerifrån.

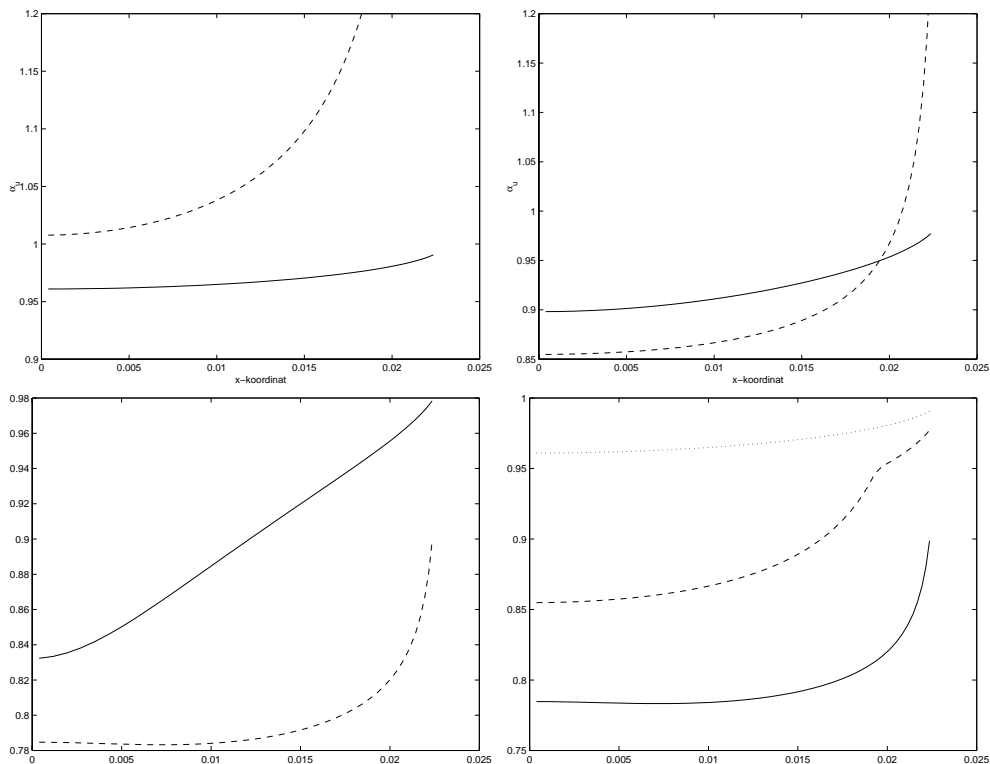
Figur 3.14 Den högra figuren visar vinkeln mellan \mathbf{u}_{uf} och planet som spänns upp av \mathbf{u}_{ub} och \mathbf{r}_{ub} för 30° . Det intressanta med vinkeln är att den är lika stor som vinkelskillnaden mellan flödesriktningen i kontraktionen beroende på om kontraktionen beräknas med fram- eller bakkanten med hjälp av mina antagande. Enligt figur (3.15

sker det en övergång från kontraktion bildad av bakkanten till kontraktion bildad av framkanten. Om vinkelskillnaden skulle vara stor är mina antaganden otillfredsställande. Figuren visar emellertid att vinkelskillnaden är mindre än en hundra del grad.

$$\alpha_{uf} = \alpha_f \frac{h_{uf}}{h_{ub}} \quad (3.64)$$

För att vara konsistent med resonemanget som gäller översidan bör hastigheten ut från trotteltanten vara vinkelrät mot kanten och ligga i trotteltplanet. Vidare bör flödet genom den kontraherade ytan vara nära riktningen på den minsta begränsade arean. För att förenkla flödeslinjen antas att den lokalt inte har någon tredimensionell spiralform utan kontraherar i ett plan. Då kan de tidigare nämnda vektorerna spänna upp planet. Nu kan punkten på framsidan \mathbf{x}_{mf} bestämmas genom att söka den punkt på trotteltantens framsida, som skär det plan som punkten på baksidan \mathbf{x}_{mb} tillhör. \mathbf{x}_{mb} beräknas genom att utnyttja att punkterna är \mathbf{x}_m :s spegling i x -axeln.

$$\mathbf{x}_{mb} = ((\mathbf{x}_m)_x, -(\mathbf{x}_m)_y, -(\mathbf{x}_m)_z) \quad (3.65)$$



Figur 3.15 Bilderna visar kontraktionskoefficienternas beroende av x -koordinaten. Den streckade kurvan bildas av framkanten medan den heldragna skapas av bakkanten. Figureerna är ritade för 10° , 30° respektive 60° . Den sista grafen visar det effektiva α_u för samma vinklar.

3.4 Beräkning av den kompressibla korrektionskoefficienten

En metod för att beräkna kontraktionskoefficienten för kompressibel strömning kommer att presenteras. Stora delar av materialet kommer från [3]. Mitt bidrag ligger i att passa in formlernas beteckningar i sammanhanget samt att skjuta in teori i de steg som är svårbegripliga. I slutet jämförs den beräknade kontraktionskoefficienten med grafen av korrektionskoefficient som är given i [9].

3.4.1 Antagande

Antaganden som behövs vid beräkning av analytisk lösning till det kompressibla kontraktionsproblemet.

- Strömningen är tvådimensionell.

- Det förekommer inte några sjuvkrafter.
- Masskrafterna är noll.
- Flödet är stationärt.
- Trycket är endast en funktion av densiteten.
- Flödet är virvelfritt.
- Gasen satisfierar isentropsambandet.
- Flödeshastigheten är mindre än ljudhastigheten.

3.4.2 Metod

För att klargöra lösningsgången beskrivs metoden kortfattat.

1. Beräkna Bernoulli's ekvation, egentligen ett samband mellan fart och densitet.
2. Beräkna Chaplygin's ekvation
 - Teckna uttrycken för hastighetspotential och strömfunktion.
 - Finn ett samband mellan dessa funktioner.
 - Eliminera beroendet av dz , för att på så sätt få differentialekvationer som beror på hastighet och densitet.
 - Gör variabelbyte till τ , för att på så sätt eliminera beroendet av både fart och densitet.
 - Eliminera hastighetspotentialen och bilda en linjär partiell differentialekvation för strömfunktionen.
3. Lös Chaplygin's ekvation
 - Fourierserietveckla med avseende på ϑ .
 - Finn koefficienterna som beror på τ , genom att lösa en hypergeometrisk differentialekvation
4. Anpassa lösningen till randvärdena
 - Bilda linjärkombinationen av termerna som löser differentialekvationen.
 - Bestäm koefficienten för varje term så att randvillkoren är uppfyllda.
 - Använd den inkompressibla lösningen för att identifiera koefficienterna.
 - Kontrollera att den kompressibla lösningen satisfierar randvillkoren.
 - Kontrollera att serien konvergerar i det betraktade området
 - Kontrollera att gränsvärdet av serien är oberoende av ϑ då $\tau \rightarrow \tau_c$

5. Integrera avståndet i y mellan de intressanta punkterna som definierar kontraktionen.
- Integrera längs konstanten $\tau < \tau_c$, för att säkra konvergens.
 - Gör gränsövergången $\tau \rightarrow \tau_c$.
6. Bestäm slutligen en konstant genom beräkning av massflödet i strålen.

3.4.3 Lamb's form av Euler's ekvation

Utgå från Navier Stokes' ekvationer. Antag, att strömningen endast sker i två dimensioner, att det inte förekommer några sjuvkrafter, att masskrafterna är noll och att lösningen är stationär. Villkoret på sjuvkrafterna ger Eulers ekvationer. Eulers ekvationer gäller även kompressibla fluider till skillnad från Navier-stoks' ekvationer [1]. De resulterandesambanden kan skrivas som

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

Skriv om ekvationens vänsterled som en summa av en rotation och en förflyttning. Betrakta den första funktionens vänsterled.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left(v \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \quad (3.67)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \left(v \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{\partial u^2}{2\partial x} + v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{\partial u^2}{2\partial y} + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

Förutom ovanstående system gäller kontinuitetsekvationen

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0. \quad (3.69)$$

3.4.4 Beräkning av Bernoulli's ekvation

Antag att p endast är en funktion av densiteten, dvs $p(\rho)$ och att flödet är virvelfritt, dvs

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (3.70)$$

Med dessa antaganden härleds Bernoulli's integral

$$\int_{p_t}^p \frac{dp}{\rho} = -\frac{U^2}{2} \quad (3.71)$$

från ekvation (3.68). Användes isentropsambandet kan trycket elimineras och integrationen utföras. Då blir den ekvivalenta ekvationen

$$\frac{\rho}{\rho_t} = \left(1 - \frac{(\gamma - 1)U^2}{2a_t^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.72)$$

3.4.5 Chaplygin's ekvation

Hastighetspotentialen, ϕ och strömfunktionen, ψ

Eftersom vi antagit att (3.70) gäller kan hastigheten uttryckas som derivatan av en hastighetspotential ϕ .

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3.73)$$

Enligt Chaplygin [2] existerar en strömfunktion ψ så att

$$\frac{\rho}{\rho_t} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \frac{\rho}{\rho_t} v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.74)$$

uppfylls.

Samband mellan ϕ och ψ

Från dessa ekvationer får man att

$$u dx + v dy = d\phi \quad (3.75)$$

och

$$-v dx + u dy = \frac{\rho}{\rho_t} d\psi \quad (3.76)$$

Multiplicera ekvation (3.76) med i och addera sedan ekvation (3.75).

$$(u - iv)d(x + iy) = d\phi + i\frac{\rho_t}{\rho} d\psi \quad (3.77)$$

Sätt

$$u - iv = Ue^{-i\vartheta} \quad \text{och} \quad z = x + iy \quad (3.78)$$

Nu kan ekvation (3.77) skrivas som

$$dz = (d\phi + i\frac{\rho_t}{\rho} d\psi) \frac{e^{i\vartheta}}{U}. \quad (3.79)$$

Eliminera z

ϑ och U är oberoende av varandra varför

$$\frac{\partial z}{\partial U} dU + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} d\vartheta = \left(\frac{\partial \phi}{\partial U} dU + \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} d\vartheta + i \frac{\rho_t}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial U} dU + \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} d\vartheta \right) \right) \frac{e^{i\vartheta}}{U} \quad (3.80)$$

Denna ekvation gäller för varje dU och $d\vartheta$. Dessa är oberoende av varandra varför identifiering av ekvationens koefficienter ger upphov till ekvationssystemet

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial U} &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial U} + i \frac{\rho_t}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial U} \right) \frac{e^{i\vartheta}}{U} \\ \frac{\partial z}{\partial \vartheta} &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} + i \frac{\rho_t}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) \frac{e^{i\vartheta}}{U} \end{aligned} \right\}. \quad (3.81)$$

Eliminera z genom att differentiera ekvationerna med avseende på ϑ respektive U .

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial U \partial \vartheta} + i \frac{\rho_t}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial U \partial \vartheta} \right) \frac{e^{i\vartheta}}{U} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial U} + i \frac{\rho_t}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial U} \right) \frac{e^{i\vartheta}}{U} i = \quad (3.82)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta \partial U} + i \frac{\rho_t}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta \partial U} \right) \frac{e^{i\vartheta}}{U} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial U} \left(-\frac{1}{U^2} \right) + i \frac{d}{dU} \left(\frac{\rho_t}{\rho U} \right) \right) e^{i\vartheta}$$

Tack vare att real- och imaginärdel är oberoende ger jämförelse av respektive komponent upphov till

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{U \partial U} &= \frac{d}{dU} \left(\frac{\rho_t}{\rho U} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial \phi}{U \partial \vartheta} &= \frac{\rho_t}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial U} \end{aligned} \right\}. \quad (3.83)$$

Inför den nya variabeln τ

Genom variabelsubstitutionen

$$\tau = \frac{(\gamma - 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2} = \frac{1}{2}(\gamma - 1) \frac{U^2}{a_t^2} \quad (3.84)$$

blir differentialekvationerna linjära. Detta är Chaplygin's ekvationer.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} &= \frac{2\tau}{(1-\tau)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \tau} &= -\frac{1-\tau \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)}{2\tau(1-\tau)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \end{aligned} \right\}. \quad (3.85)$$

Eliminera ϕ

Dessa två första ordningens partiella differentialekvationer leder till en andra ordningens partiell differentialekvation för ψ efter elimination av ϕ . För att förenkla uttrycket skrivmässigt införs beteckningen $\beta = \frac{1}{\gamma-1}$.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right) + \frac{1-\tau(2\beta+1)}{(1-\tau)^{\beta+1} 2\tau} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} = 0 \quad (3.86)$$

Ekvationen är elliptisk för underljudsfart, eftersom koefficienterna för $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}$ och $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2}$ är positiva.

3.4.6 Exakt lösning av Chaplygin's ekvationer för $M < 1$

Fourierserieutveckling med avseende på ϑ

Betrakta

$$\psi_n = z_n(\tau) \sin(2n\vartheta + \omega_n) \quad \text{för } n \in \mathbf{Z}_+, \quad (3.87)$$

där ω_n är konstanter.

Beräkning av koefficientfunktionerna $z_n(\tau)$ till respektive term i serien.

Funktionen insättes i ekvation (3.86) varvid sinusfaktorn kan bryta ut och därmed beräknas z_n ur ekvationen

$$\tau^2(1-\tau)\frac{d^2z_n}{d\tau^2} + \tau(1+(\beta-1)\tau)\frac{dz_n}{d\tau} - n^2(1-(2\beta+1)\tau)z_n = 0 \quad (3.88)$$

Sätt

$$\begin{aligned} z_n &= \tau^n y_n \\ a_n + b_n &= 2n - \beta \\ a_n b_n &= -\beta n(2n + 1) \\ c_n &= 2n + 1 \end{aligned} \quad (3.89)$$

Löser man ut de nya konstanterna och funktionerna ur ekvationen får man

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2y_n}{d\tau^2} + (c_n - (a_n + b_n + 1)\tau)\frac{dy_n}{d\tau} - a_n b_n y_n = 0 \quad (3.90)$$

Detta är utseendet på en hypergeometrisk differentialekvation. Enligt [8] så existerar en lösning $y_n = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(n)} \tau^k$ för τ nära noll, då c_n inte är ett heltal ≤ 0 . Insättning av y_n i ekvationen ger rekursionformeln

$$(c_n + k)(1 + k)B_{k+1}^{(n)} = (a_n + k)(b_n + k)B_k^{(n)}, \quad k \geq 0. \quad (3.91)$$

Sätts $B_0^{(n)} = 1$ så fås

$$B_k^{(n)} = \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{(a_n + l)(b_n + l)}{c_n + l} \quad (3.92)$$

Slutligen är summans konvergensradie 1.

3.4.7 Randvärdesproblem

Tänkbara lösningar

Eftersom Chaplygin's ekvation är linjär kan en ny lösning genereras som linjärkombinationer av lösningar. Chaplygin studerade lösningar på

$$\psi = A + C\vartheta + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \psi_j, \quad (3.93)$$

där A , C och C_j är konstanter som ska bestämmas med hjälp av randvillkor.

Eftersom gasen flödar parallellt längs fasta ytor, kommer strömfunktionen ψ att vara konstant längs motsvarande yta i (τ, ϑ) -planet. Till exempel kommer en rät yta att avbildas som en linje med ϑ konstant. På strålens rand är trycket konstant och genom att använda Bernoulli's integral ser man att även hastigheten är konstant. Detta gör slutligen att även τ blir konstant.

3.4.8 Jämförelse med inkompressibel lösning

Jämför korresponderande problem med samma randvillkor för kompressibel och inkompressibel strömning. Randvärdena gäller geometri, hastigheter på oändligt avstånd samt hastigheten på strålens rand. För att få en betydelsefull variabel i båda fallen betraktas $\frac{\tau}{\tau_c} = \frac{u^2}{u_c^2}$, där indexering innebär variabelns värde på strålens rand. Inför en variabel t , så att

$$t = \left(\frac{dF}{u_c dz} \right)^2 = \frac{\zeta}{u_c}. \quad (3.94)$$

I ekvation (2.39), sätts $n = 2$. Då kan vi skriva den inkompressibla hastighetspotentialen F_i , som

$$F_i = \frac{q}{\pi} \ln \frac{\zeta}{\zeta^2 - u_c^2} = k + \frac{q}{\pi} \ln \frac{\frac{\zeta}{u_c}}{\left(\frac{\zeta}{u_c}\right)^2 - 1} = k + \frac{q}{2\pi} \ln \frac{t}{(1-t)^2} \quad (3.95)$$

, där q är en konstant. Den komplexa potentialen definieras så att rumsderivatan är lika med konjugatet av den komplexa hastigheten.

$$\frac{dF}{dz} = u e^{-i\vartheta} \Leftrightarrow \frac{dF}{u_c dz} = \frac{u}{u_c} e^{-i\vartheta} = \sqrt{\frac{\tau}{\tau_c}} e^{-i\vartheta} \quad (3.96)$$

Med hjälp av (3.96) kan t uttryckas i τ

$$t = \left(\frac{dF}{u_c dz} \right)^2 = \frac{\tau}{\tau_c} e^{-2i\vartheta}. \quad (3.97)$$

Detta betyder att det inkompressibla fallet beskrivs av följande två ekvationer

$$\frac{dF}{u_c dz} = \sqrt{t} \quad (3.98)$$

samt

$$F = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{t}{(1-t)^2} \quad (3.99)$$

Innan vi ersätter t med (3.97) kan \ln utvecklas för små t till

$$F = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{q}{2\pi} \ln t - \frac{q}{\pi} \ln(1-t). \quad (3.100)$$

Beräkna $F(t)$ genom att ersätta t med (3.97) i

$$F = \frac{q}{2\pi} \ln t + \frac{q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \quad (3.101)$$

$$F = \frac{q}{2\pi} \ln \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right) - \frac{q}{\pi} i\vartheta + \frac{q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^n \frac{e^{-2in\vartheta}}{n} \quad (3.102)$$

Målet är att beräkna $\psi_i(\tau)$, vilket är imaginärdelen av F

$$\frac{\pi}{q} \psi_i(\tau) = -\vartheta + \mathcal{I} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^n \frac{(\cos(2n\vartheta) - i \sin(2n\vartheta))}{n} \quad (3.103)$$

Summan konvergerar absolut då $\tau < \tau_c$, vilket medför att det är tillåtet att ta imaginärdelen av varje term.

$$\frac{\pi}{q} \psi_i = -\vartheta - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^n \frac{\sin(2n\vartheta)}{n} \quad (3.104)$$

Sätt det kompressibla fallets lösning till

$$\frac{\pi}{q} \psi = -\vartheta - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^n \frac{y_n(\tau) \sin(2n\vartheta)}{y_n(\tau_c) n}. \quad (3.105)$$

För att uttrycket ska vara en lösning till problemet måste randvärdena stämma, uttrycket satisfiera differentialekvationerna i det inre samt summan konvergerar absolut och likformigt för de önskade (τ, ϑ) . Det är inte svårt att visa att randvillkoren är uppfyllda. Summans konvergens är betydligt mer komplicerad [2].

3.4.9 Beräkning av kontraktionskoefficienten

Tanken är att beräkna det vertikala avståndet mellan punkterna C och B i figur (2.10), dvs $y_B - y_C$. Eftersom $\partial u = 0$ gäller att

$$y_B - y_C = \int_C^B \frac{\partial y}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad (3.106)$$

Från den undre ekvation (3.81) beräknas

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \mathcal{I} \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \mathcal{I} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} + i \frac{\rho_t}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) \right) \frac{\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)}{u} \right\} \Leftrightarrow \quad (3.107)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta}{u} + \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \frac{\rho_t \cos \vartheta}{\rho u} \quad (3.108)$$

3.4. BERÄKNING AV DEN KOMPRESSIBLA KORREKTIONSKOEFFICIENTEN 61

Men eftersom en strömlinje följes är $\partial\psi = 0$ och

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta}{U} \quad (3.109)$$

$$y_B - y_C = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta}{U} d\vartheta = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta}{U} d\vartheta \quad (3.110)$$

Med hjälp av Chaplygin's andra ekvation kan $\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}$ uttryckas i $\frac{\partial \psi}{\partial \tau}$. För att förvissa sig om konvergens för summan, som ingår i ψ , evalueras integralen längs en linje $\tau < \tau_c$ där slutligen $\tau \rightarrow \tau_c$.

$$y_B - y_C = \lim_{\tau \rightarrow \tau_c} \frac{-2\tau}{U(1-\tau)^\beta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \sin \vartheta d\vartheta \quad (3.111)$$

För att förbereda uttrycket av $\frac{\partial \psi}{\partial \tau}$ sätts

$$x_n(\tau) = 1 + \frac{\tau y'_n(\tau)}{n y_n(\tau)} \quad (3.112)$$

$$y_B - y_C = \lim_{\tau \rightarrow \tau_c} \frac{-2\tau}{U(1-\tau)^\beta} \cdot \quad (3.113)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 -\frac{q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^n \frac{y_n(\tau)}{y_n(\tau_c)} \frac{1}{\tau} + \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^n \frac{y'_n(\tau)}{y_n(\tau_c)} \frac{1}{n} \right) \sin 2n\vartheta \sin \vartheta d\vartheta =$$

$$\frac{q}{\pi} \lim_{\tau \rightarrow \tau_c} \frac{2}{U(1-\tau)^\beta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^n \frac{y_n(\tau)}{y_n(\tau_c)} x_n(\tau) \sin 2n\vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$

Efter att ha kastat om summa och integral är integranden

$$\sin 2n\vartheta \sin \vartheta = \frac{1}{2} (\cos(2n-1)\vartheta - \cos(2n+1)\vartheta)$$

Integralen beräknas därefter till

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin 2n\vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \left(\frac{4n}{4n^2-1} \right) \quad (3.114)$$

Sätts värdet in i den ursprungliga formeln återstår nu endast gränsövergången.

$$y_B - y_C = \frac{q}{\pi} \lim_{\tau \rightarrow \tau_c} \frac{1}{U(1-\tau)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^n \frac{y_n(\tau)}{y_n(\tau_c)} x_n(\tau) (-1)^{n-1} \left(\frac{4n}{4n^2-1} \right) = \quad (3.115)$$

$$\frac{q}{\pi U_c (1 - \tau_c)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} x_n(\tau_c) \left(\frac{4n(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \right)$$

Slutligen eliminerars q genom att utnyttja massans bevarande. För detta behövs först ett uttryck för densiteten i strålen.

$$\frac{\rho_c}{\rho_t} = \left(1 + \frac{(\gamma - 1)M_c^2}{2} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{1}{1 + \frac{(\gamma-1)M_c^2}{2}} \right)^\beta = \quad (3.116)$$

$$\left(1 - \frac{(\gamma - 1)M_c^2}{2 + (\gamma - 1)M_c^2} \right)^\beta = (1 - \tau_c)^\beta$$

Massans bevarande leder till

$$\rho_t q = U_c \rho_t (1 - \tau_c)^\beta 2y_C \Leftrightarrow q = U_c (1 - \tau_c)^\beta 2y_C \quad (3.117)$$

Nu kan jag det beräknade värdet av q sättas in i ekvation (3.115)

$$y_B - y_C = \frac{2y_C}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} x_n(\tau_c) \left(\frac{4n(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \right) \quad (3.118)$$

Löses kvoten $\frac{y_C}{y_B}$ ut så är kontraktionskoefficienten slutligen beräknad.

$$\alpha = \frac{y_C}{y_B} = \frac{\pi}{\pi + 8 \sum_{n=1}^{\infty} x_n(\tau_c) \left(\frac{n(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \right)} \quad (3.119)$$

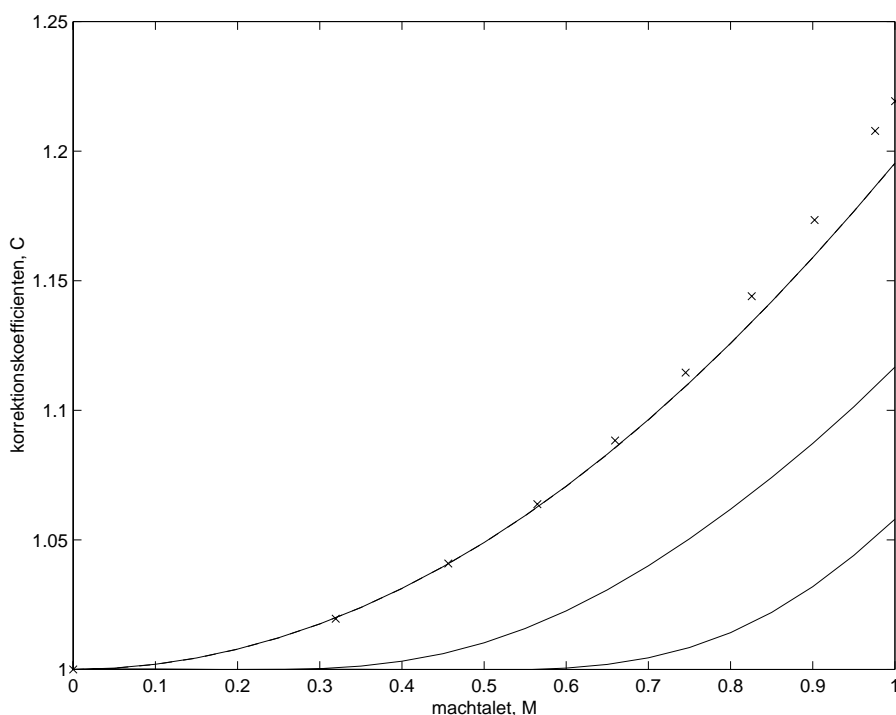
Chaplygin uppskattar också sin exakta formel med

$$\alpha = \frac{\pi}{\pi + 2 - 5 \frac{\tau_c}{1 - \tau_c} + 2 \left(\frac{\tau_c}{1 - \tau_c} \right)^2} = \frac{\pi}{\pi + 2 - \frac{5}{2}(\gamma - 1)M^2 + (\gamma - 1)^2 M^4} \quad (3.120)$$

3.4.10 Jämförelse mellan den beräknade kontraktionskoefficienten och korrektionskoefficienten

Korrektionskoefficienten, C , som funktion av α och M , kommer från [9]. Helst skulle jag vilja härleda motsvarande exakta uttryck för utströmning mellan två plan med godtycklig vinkel, vilket är fullt möjligt att genomföra. Uttrycket är emellertid alltför komplicerat för beräkning av värden, utan att göra smarta approximationer. Tyvärr har jag inte lyckats hitta en tillräckligt bra beräkningsmetod inom exjobbets tidsram. För fortsatta studier hänvisar jag till [2] och [3]. Falkovich har dessutom under samma förutsättningar som tidigare givit ett uttryck för kontraktionskoefficienten vid utströmning från ett rör med ändlig bredd och godtycklig vinkel. Falkovich beräkningar är däremot betydligt mer komplicerat att genomföra redan vid specialfallet med rät vinkel. I [9] står metodiken kortfattad sammanställd. Det är tänkbart att dessa resultat kan användas vid beräkning av kontraktionen vid stora öppningsvinklar, då areakvoten mellan minsta begränsningsarea och rörets tvärsnittsarea är nära 1.

På grund av tidsbrist väljer jag att endast undersöka sambandet mellan specialfallet med rät vinkel och korrektionskoefficienten.



Figur 3.16 De kryssade punkterna är beräknade med den exakta formeln. Den streckade linjen, som nästan helt döljs av den översta heldragna motsvarar Chaplygin's approximation. De heldragna kurvorna motsvarar korrektionskoefficienten för $\alpha_i=0.6, 0.8, 0.9,$ och 1 uppifrån och ner.

3.5 Grundekvationerna för en delyta i

Dela upp den totala ytan i n st delar. Indexera variablerna med avseende på delytan med index i . Inför beteckningarna

$$F_1(M) = \left(1 + \frac{(\gamma - 1)M^2}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

och

$$F_2(M) = \frac{\sqrt{\gamma}M}{\left(1 + \frac{(\gamma - 1)M^2}{2}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}}.$$

Grundekvationerna kan då skrivas för area i som

$$\frac{p_e}{p_t} = 1 - K_i \left(1 - \frac{p_i}{p_t}\right) \quad (3.121)$$

$$\frac{p_t}{p_i} = F_1(M_i) \quad (3.122)$$

$$\frac{\dot{m} P_i \sqrt{RT_t}}{A_i \alpha_i C_i p_t} = F_2(M_i) \quad (3.123)$$

$$K_i = \left(1 - \frac{A_i \alpha_i C_i}{P_i A}\right)^2 \quad (3.124)$$

3.6 Hastigheten i kontraktionen

Hastigheten i kontraktionen beräknas genom att substituera ekvation 3.124 och ekvation 3.122 i ekvation 3.121.

$$\frac{p_{t_2}}{p_{t_1}} = 1 - \left(1 - \frac{A_i \alpha_i C_i}{P_i A}\right)^2 \left(1 - F_1^{-1}(M_i)\right). \quad (3.125)$$

Sedan används ekvation 3.123.

$$\frac{p_e}{p_t} = 1 - \left(1 - \frac{\dot{m} \sqrt{RT_t}}{p_t F_2(M_i)}\right)^2 \left(1 - F_1^{-1}(M_i)\right). \quad (3.126)$$

Det intressanta att notera för fortsättningen är, att den enda storheten som beror på delytan är machtalet. Detta medför att machtalet blir detsamma i samtliga områden. Dessutom blir det statiska trycket oberoende av index i enligt ekvation (3.122). Men då betyder det enligt ekvation (3.121), att förlustkoefficienten K är oberoende av i . Då kan det sättas in i ekvation (3.124), vilket innebär att areakvoten är oberoende av i .

3.7 Andel flöde genom delyta i

Enligt förra stycket är areakvoten konstant med avseende på i . Detta gör att, andel flöde genom delyta i , P_i kan skrivas på följande sätt

$$P_i = k A_i \alpha_i C_i, \quad (3.127)$$

där k är oberoende av i . k bestäms med hjälp av villkoret att

$$\sum_i P_i = 1. \quad (3.128)$$

Detta ger att k är

$$k = \frac{1}{\sum_i A_i \alpha_i C_i}, \quad (3.129)$$

och således beräknas andelen som

$$P_i = \frac{A_i \alpha_i C_i}{\sum_i A_i \alpha_i C_i}. \quad (3.130)$$

3.8 Ekvationerna för ett diskritiserat problem

Utgå från grundekvationerna för en delyta i . Ta bort indexeringen för de variabler som inte beror av vilken delyta som betraktas. Använd sedan uttrycket för andelen flöde P_i , för att eliminera det specifika beroendet av en viss delyta. Det enda beroendet av egenskaper som gäller på en viss delyta försvinner helt, i och med att man summerar över alla bidrag. Detta innebär att eventuella avvikelser i vissa intervall inte slår igenom så mycket på resultatet. För att göra detta kapitel komplett definierars vad samtliga ingående variabler står för

p_e	Totaltrycket efter trotteln.
p_t	Totaltrycket före trotteln.
p	Statiska trycket i kontraktionen.
K	Förlustkoefficienten.
M	Machtalet för medelhastigheten i kontraktionen.
\dot{m}	Massflödet förbi trotteln.
R	Gaskonstanten.
T_t	Totaltemperaturen före trotteln.
A_i	Area av en delyta.
α_i	Den inkompressibla kontraktionskoefficienten för en delyta.
C_i	Den kompressibla korrektionsfaktorn för en delyta.
$A(\beta)$	Den av trotteln begränsade area.
$\sum_i A_i \alpha_i C_i$	Arean av de kontraherade ytorna, dvs den minsta yta flödet måste passera.

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_e}{p_t} &= 1 - K \left(1 - \frac{p}{p_t} \right) \\ \frac{p_t}{p} &= F_1(M) \\ \frac{\dot{m} \sqrt{RT_t}}{p_t \sum_i A_i \alpha_i C_i} &= F_2(M) \\ K &= \left(1 - \frac{\sum_i A_i \alpha_i C_i}{A(\beta)} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.131)$$

3.9 Beräkning av massflödet som funktion av tryckdifferensen

Problemet består i att beräkna massflödet förbi trotteln. Givet är totaltrycket före trotteln och efter trotteln, totaltemperaturen före trotteln och β . Med hjälp av värdena på variablerna beräknas $A(\beta)$, A_i och α_i . Det som återstår att bestämma är K , C_i , M och $\frac{p}{p_t}$. Beräkna tryckkvoten $\frac{p}{p_t}$.

3.9.1 Beräkna tryckkvoten i kontraktionen, $\frac{p}{p_t}$

Börjar med att uttrycka korrektionskoefficienten C_i , som ett sjättegradspolynom i tryckkvoten, $\frac{p}{p_t}$. Koefficienterna beror av α och av i .

$$C_i = \sum_{k=0}^6 a_k(\alpha_i) \left(\frac{p}{p_t}\right)^k \quad \frac{p}{p_t} \in \left[\frac{p^*}{p_t}, 1\right] \quad (3.132)$$

Genom att använda förlustkoefficientens uttryck enligt ekvation 4 i (3.131) i den första ekvationen i (3.131) erhålls ett trettondegradspolynom i $\frac{p}{p_t}$.

$$\frac{p}{p_t} K - K + 1 - \frac{p_e}{p_t} = 0 \quad (3.133)$$

$$K = \left(1 - \frac{\sum_i A_i \alpha_i C_i}{A}\right)^2 \quad (3.134)$$

Här kan K uttryckas som en funktion av $\frac{p}{p_t}$.

$$\left(1 - \frac{\sum_i A_i \alpha_i \left(\sum_{k=0}^6 a_k(\alpha_i) \left(\frac{p}{p_t}\right)^k\right)}{A}\right)^2 = \quad (3.135)$$

$$\left(1 - \frac{\sum_{k=0}^6 \left(\sum_i A_i \alpha_i a_k(\alpha_i)\right) \left(\frac{p}{p_t}\right)^k}{A}\right)^2$$

Sätt

$$b_0 = 1 - \frac{1}{A} \sum_i A_i \alpha_i a_0(\alpha_i) \quad (3.136)$$

$$b_k = \frac{1}{A} \sum_i A_i \alpha_i a_k(\alpha_i) \quad k = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.137)$$

Då kan K skrivas som

$$K = \left(\sum_{k=0}^6 b_k \left(\frac{p}{p_t}\right)^k\right)^2 = \quad (3.138)$$

$$\sum_{k=0}^{12} \left(\sum_{i=\max(0, k-6)}^{\min(k, 6)} b_i b_{k-i}\right) \left(\frac{p}{p_t}\right)^k$$

3.9. BERÄKNING AV MASSFLÖDET SOM FUNKTION AV TRYCKDIFFERENSEN 67

För att undvika komplicerade uttryck sätts koefficienterna till c_k . Ekvation (3.133) kan nu skrivas som

$$c_{12} \left(\frac{p}{p_t}\right)^{13} + \sum_{k=1}^{12} (c_{k-1} - c_k) \left(\frac{p}{p_t}\right)^k - c_0 + 1 - \frac{p_e}{p_t} = 0 \quad (3.139)$$

Ekvationens definitionsmängd är $\frac{p}{p_t} \in \left[\frac{p}{p_t}^*, 1\right]$. Fysikaliskt kan tryckkvoten anta värden mellan 0 och 1. Existerar det en lösning inom definitionsmängden till ekvationen kommer denna att vara en rot till ekvationen. Saknas lösning till ekvationen inom definitionsområdet följer att roten ligger i intervallet $]0, \frac{p}{p_t}^* [$, dvs trotteln är strypt.

3.9.2 Beräkning av massflödet

Massflödet beräknas som

$$\dot{m} = \frac{p_t \sum_i A_i \alpha_i C_i}{\sqrt{RT_t}} \psi\left(\frac{p}{p_t}\right) \quad (3.140)$$

där ψ -funktionen är

$$\psi\left(\frac{p}{p_t}\right) = \begin{cases} \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \left(1 - \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{(\kappa-1)}{\kappa}}\right)} & \text{för } \frac{p}{p_t} \geq \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \\ \kappa^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2\kappa}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} & \text{för övrigt} \end{cases} \quad (3.141)$$

Observera att ψ inte står för strömfunktionen som tidigare.

Utvärdering av 3D-modellen

4.1 Modellens definitionsområde

Det tredimensionella problemet utvärderas genom att betrakta funktionen $\dot{m}(\beta, T_t, p_t, p_e)$. För att strukturera och analysera funktionen kan den skrivas som

$$\dot{m}(\beta, T_t, p_t, p_e) = \left(\frac{p_t}{\sqrt{RT_t}}\right) A_c \psi. \quad (4.1)$$

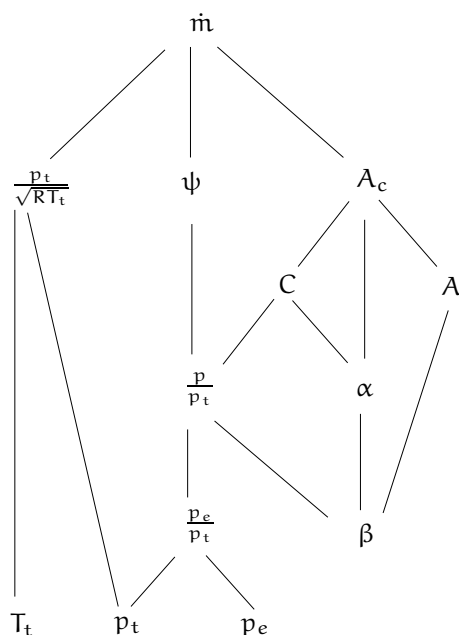
Nu kan de tre faktorerna studeras separat. Till att börja med utgör kvoten ingen begränsning för definitionsområdet.

4.1.1 A:s begränsning

Förutsättningen på den beräknade arean är att trottelnkanten definierar den kontraktion som är minst. Den minsta arean är dock den vid axeln, för vinklar större än ca 70°.

4.1.2 α :s begränsning

För att bestämma α var det väsentligt att bestämma γ och omgivande geometri. Om arean och omgivande geometri är felaktig kommer även α att bli fel. Antaganden rörande γ var för det första att flödesriktningen över trottelnkanten kommer att ligga, i planet som definieras av normalen till trottelnkanten i trottelnplanet och normalen till den begränsande arean. Detta antagande är svårt att bedöma under vilka förhållanden det är giltigt. Förhoppningsvis kan jämförelser med motordata indikera detta. Det andra antagandet som gjordes var att flödesriktningen i kontraktionen



Figur 4.1 Beroendet mellan ingående variabler.

överensstämmer tillräckligt bra med normalens riktning till den begränsande arean. Även detta antagande är också svårt att få en uppfattning om giltigheten av när det gäller. Teorin bör stämma väl i de fall vägen är fri efter öppningen vid trotteln. Detta gäller upp till ca 60 grader.

4.1.3 C:s begränsning

C är beräknad teoretiskt men det finns också litteratur som redovisar experiment med överensstämmelse. Detta gäller dock bara för underljudsfart. En undersökning om vad som händer i överljudsfart återstår. I lavalldysan är det sant att när hastigheten uppgår till ljudets beror flödet endast av förhållandena före dysan, detta beroende på att ingen information om förhållanden efter dysan kan komma förbi ljudbarriären. I trottelfallet är det emellertid inte lika lätt avfärdat. Anledningen är att strålens begränsning i det här fallet inte är en fast vägg utan fluiden själv. Detta medför att det kan finnas möjligheter för till exempel trycket efter trotteln att samspela med trycket före, trots att flödet i strålen är strypt. Effekter av detta skulle eventuellt kunna visa sig vid små tryckkvoter.

4.1.4 A_c:s begränsning

A_c blir felaktig redan för mindre vinklar än A. Detta beror på att kontraktionen av axeln blir mindre än tvärsnittsarean vid axeln. Denna kontraktion kommer dessutom

att inverka på flödesriktningarna på trottelkantens ovansida.

4.2 Jämförelse mellan olika tvärsnittsareor

Den projicerade arean betraktar trotteln som en oändligt tunn skiva sittande på en axel. Definiera planet som skär röret under rät vinkel. Arean beräknas som rörets tvärsnittsarea minus projektionen av axel och skiva i det nämnda planet. Arean beräknas explicit som [4]

$$A_H = \frac{\pi D^2}{4} \left[\left(1 - \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_s}\right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{d}{D \cos \varphi} \sqrt{\cos^2 \varphi - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cos^2 \varphi_s} - \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_s} \arcsin\left(\frac{d \cos \varphi_s}{D \cos \varphi}\right) - \frac{d}{D} \sqrt{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2} + \arcsin\left(\frac{d}{D}\right) \right) \right]. \quad (4.2)$$

Den projicerade arean är korrekt om flödet endast strömmar i rörets längdriktning vid trotteln. Simuleringarna visar att antagandet inte är bra.

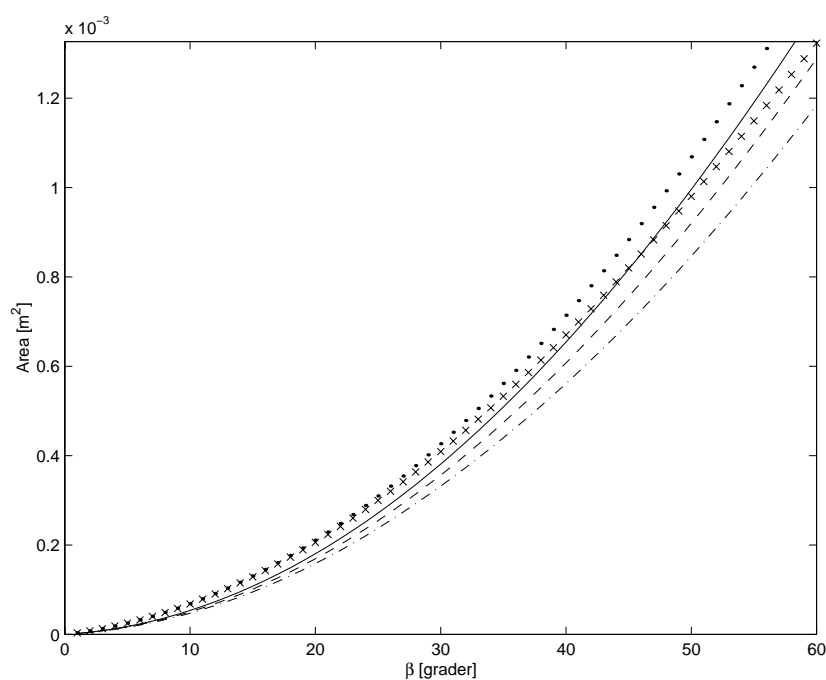
I de noggrannare areaberäkningarna är inte trotteln den minsta arean flödet måste passera utan kontraktionen efter trotteln. Resultatet av de olika areaberäkningarna kan ses i figurerna (4.2) och (4.3). Den tredimensionella ytan är givetvis större än den projicerade arean. Avvikelsen mellan de två areorna minskar då trotteln tjocklek beaktas. Läggjs därtill effekten med kontraktion blir arean ännu mindre. Arean av kontraktionen beror dessutom på hastigheten, varför graferna för hastighetens övre och undre gräns ritas. Areaberäkningen har inget egenvärde eftersom det inte finns någon tillämpning där arean är det viktiga. Det intressanta är hur arean används i beräkningar av exempelvis massflöde. Därför är det intressant att jämföra beräknade massflöden med uppmätta massflöden. Det är också intressant att studera den minsta area som bildas av kontraktionen. Kontraktionen beror av flödes hastigheten varför det går att definiera en undre och övre gräns av denna area som funktion av β .

4.3 Mätningar på motorn

Modellen valideras genom jämförelse mellan beräknat och uppmätt massflöde. Beräkningarna bygger emellertid på en mängd konstanter och variabler som måste vara tillförlitliga för att det ska gå och dra någon slutsats om modellen.

4.3.1 Problemets geometriska konstanter

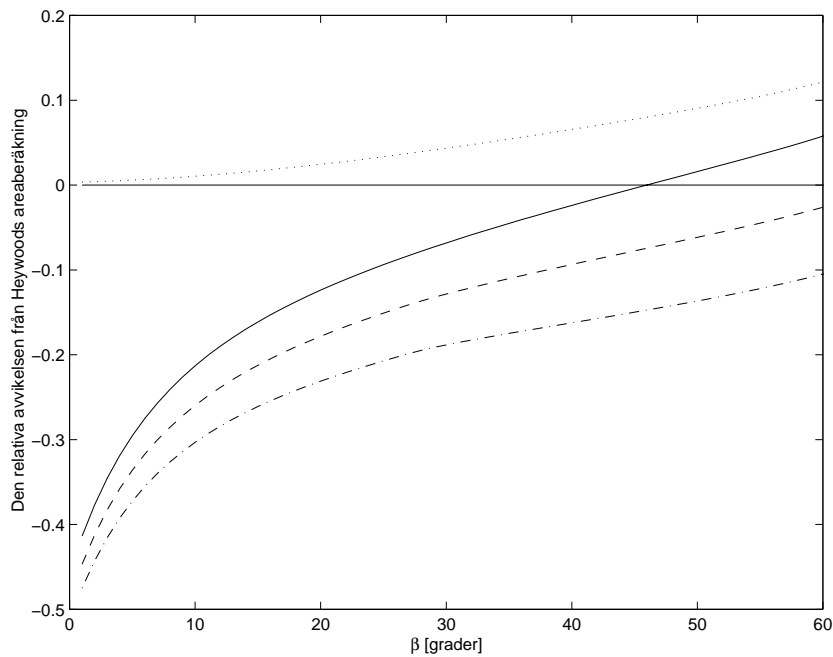
Lättast att bestämma exakt var konstanterna t och d . Rördiametern var lite mer komplicerad på grund av att den varierar kring trotteln, men den största osäkerheten ligger i bestämningen av β . En potentiometer kopplad till trottelaxel genererar en spänning som antas vara linjär mot utslaget. För att kontrollera detta uppmättes



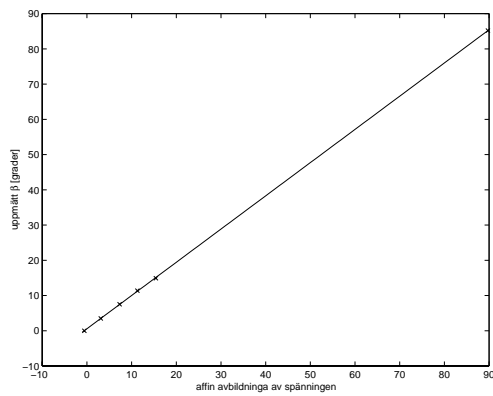
Figur 4.2 Visar den minsta area luftflödet måste passera. Uppräknat ovanifrån i det högra övre hörnet, markerar de olika kurvorna: arean som begränsas av trotteln och rör där trotteln tjocklek är 0, samma area fast tjockleken på trotteln beaktas, den projicerade arean, den största kontakterade tvärsnittsarean och slutligen den minsta kontakterade tvärsnittsarean. I praktiken måste alltså flödet passera en area som ligger mellan de två understa kurvorna.

utslag och spänning för ett antal små vinklar, samt helt slutet och fullt öppet trotteln. Anledningen till att endast små utslag studerades förutom ändpunkterna beror på att det arbetsområdet känsligare för fel. Förutom att veta hur potentiometern mäter vinkelutslag måste också φ_s , bestämmas. Denna vinkel är betydelsefull för beräkningen av arean, och svår att bestämma. För att få ett tillförlitligt värde uppmättes vinkeln på flera olika sätt. Här följer en tabell med de värden som använts.

D	=	55	mm
d	=	9.8	mm
φ_s	=	4.5°	
$\hat{\beta}$	=	85.2°	
t	=	1.6	mm



Figur 4.3 Den horisontella linjen motsvarar arean av den projicerade ytan. Den prickade linjen motsvarar arean av en trottel med $t = 0$. Den heldragna är arean av den studerade trotteln. Den sträckade linjen motsvarar den arean vid kontraktionen då ljudhastigheten är uppnådd. Slutligen visar den streck-prickade linjen, arean i kontraktionen då flödes hastigheten kan betraktas som inkompressibel.



Figur 4.4 De kryssade punkterna markerar uppmätt sambandet mellan en affin avbildning av den mätta spänningen och den genom fysiska mätningar uppmätta vinkeln β . Det går inte att förkasta att potentiometern är linjär.

4.3.2 Problemets variabler

Förutom geometrin behövs totaltryck före och efter trotteln samt massflöde och temperaturen innan trotteln. Mätningen av temperatur har inte ifrågasatts. Massflöde är svårt att mäta, men dessa värden har inte undersökts huruvida de stämmer. Det finns misstankar om att massflödesgivaren eventuellt har fel förstärkning. Tryckmätningarna behöver emellertid kontrolleras. Givaren som mäter trycket efter trotteln sitter nära trotteln och mäter stagnationstrycket. Stagnationstrycket är detsamma som totaltrycket, varför det inte kan anses nödvändigt att korrigera detta tryck. Trycksensor före trotteln sitter lågt ifrån trotteln vilket tyder på att mätningen måste korrigeras.

4.3.3 Korrektion av totaltrycket före trotteln

I labbet sitter tryckmätaren i inloppet ca 1m innan trotteln. Mätaren är monterad i rörväggen, vilket medför att den mäter det statiska trycket. Röret fram till trotteln har olika elliptiska tvärsnitt och avböjs 270°.

Korrektion av uppmätt statiskt tryck

Flödes hastigheterna i röret är förhållandevis låga varför approximationerna för inkompressibelt flöde kan användas. Först beräknas totaltrycket vid mätaren som

$$p_{t,givare} = p_{givare} + \frac{\dot{m}^2}{2\rho A_{givare}^2} \quad (4.3)$$

Tryckförluster

Tryckförlusterna i röret kan delas upp i två delar. För det första sjunker trycket pga friktion i röret. Friktionsförlusten beräknas som

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho u^2. \quad (4.4)$$

Det är troligt att rörets insida är tekniskt slät. Då kan λ beräknas som

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad \text{då } Re < 2300 \quad (4.5)$$

$$\lambda = \frac{0.32}{\sqrt[4]{Re}} \quad \text{då } 2300 < Re < 10^5$$

eller

$$\lambda = 0.0032 + 0.22Re^{-0.237} \quad \text{då } 10^5 < Re < 10^8$$

Den andra typen av förluster är engångsförlusterna. Exempel på sådana är rörkrökar och expansionsförluster. De kan beräknas genom

$$\Delta p = K \frac{1}{2} \rho u^2. \quad (4.6)$$

Den avancerade utformningen av olika tvärsnitt tyder på att den är fluiddynamiskt genomtänkt. Mätningar visar, att det inte rör sig om stora skillnader i tvärsnittsarea på olika delar av röret, varför expansionsförluster kan uteslutas. Då återstår två 90°-krökar och två 45°-krökar. Den minimala förlusten och därmed också den minimala förlustkoefficienten vid en 90°-krök är ca 0.1 enligt [7]. För att täcka in intervallet där det sanna värdet på K ligger studeras både $K = 0.2$ och $K = 0.6$. Beräkningen kan för $K = 0.2$, sammanfattas av uttrycket

$$p_t = p_{\text{givare}} + (1 - 20\lambda - 0.2)\rho u^2. \quad (4.7)$$

4.4 Fasplanet ($\beta, \frac{p_e}{p_t}$)

För att illustrera kvalitativt hur lösningarna beror av systemets tillstånd betraktas \dot{m} som en funktion av $\frac{p_t}{\sqrt{RT_t}}$, $\frac{p_e}{p_t}$ och β . Fördelarna med detta val är för det första att antalet variabler är minimalt. För det andra är den första variabeln proportionell mot \dot{m} , samt oberoende av geometrier. Variabeln är också relativt konstant och utgör i sig ingen begränsning av definitionsområdet av \dot{m} . Detta medför att fasplanet kvalitativt kommer att beskrivas väl av de två andra variablerna för ett fixt $\frac{p_t}{\sqrt{RT_t}}$. Medelvärde för mätserien på motorn ligger på 448. Maxvärdet respektive minvärdet är 640 och 350. Fasdiagrammet beräknas för $\frac{p_t}{\sqrt{RT_t}} = 500$.

4.4.1 Intressanta händelser

Flöde hastigheten när ljudhastigheten

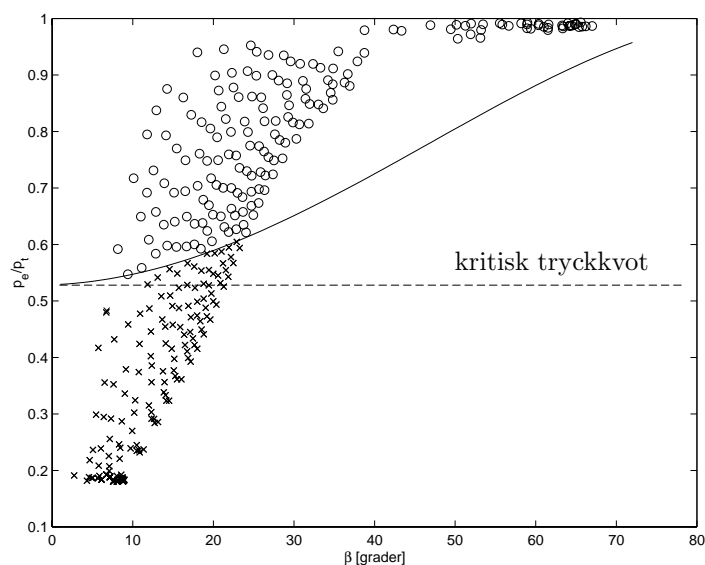
Det går att beräkna kurvan då flödet uppnår ljudets hastighet genom att uppskatta $A_c(\beta)$ och sätta $\frac{p}{p_t} = 0.5283$ i

$$\frac{p}{p_t}K - K + 1 - \frac{p_e}{p_t} = 0. \quad (4.8)$$

Resultatet visas i figur (4.5). Enligt figuren kommer ljudhastigheten uppnås vid större tryckkvot än den kritiska. För att visa hur detta är möjligt skissas hur de olika trycken varierar längs röret i figur (4.6). Det intressanta i figuren är att jämföra andelen av dynamiskt tryck. I den vanligaste massflödesberäkningen [4], antar man att det statiska trycket vid trottnen är lika med totaltrycket efter trottnen. Detta är sant då flödet strömmar ut i en oändligt bred behållare, vilket är en dålig beskrivning av ett rör, speciellt då strypningen inte är stor.

Turbulens i röret

Turbulens i röret uppträder då medelhastigheten $\bar{u}_{in} > 0.6356$. Detta kan approximeras genom att använda ekvationen $\dot{m} = \frac{p_t}{\sqrt{RT_t}}\psi A_c$ och låta A_c vara lika med arean för inkompressibelt flöde. Då kan tryckkvoten lösas ut.



Figur 4.5 Cirklarna markerar de justerade arbetspunkter där den största hastigheten är mindre än ljudhastigheten. Kryssen markerar de punkter där ljudhastigheten är uppnådd. Justeringen består i att temperaturen bestäms då $\frac{P_+}{\sqrt{RT_+}} = 500$. Grafen visar en approximation av den teoretiska övre gränsen för strypning.

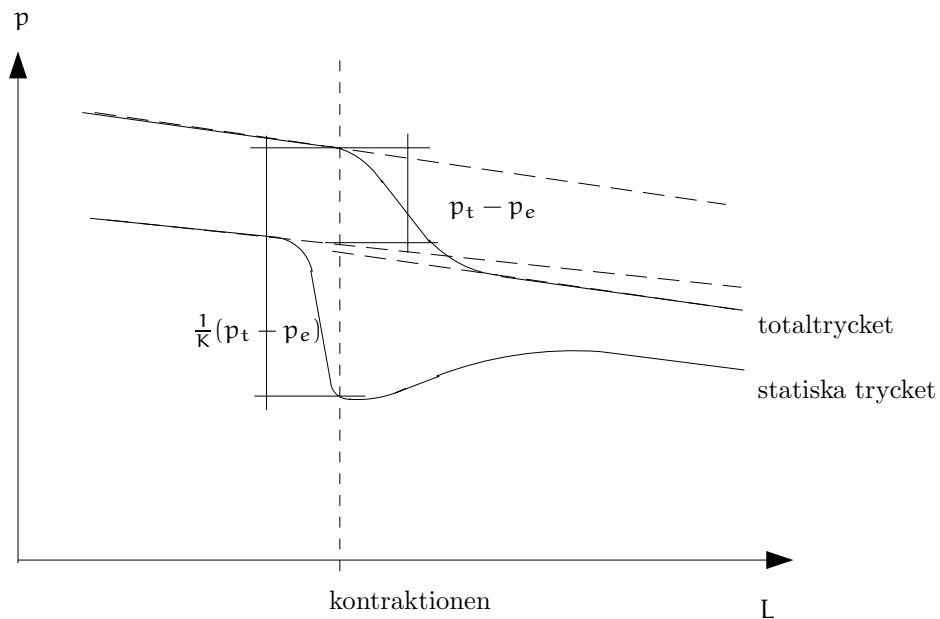
Turbulens förbi trotteln

Turbulens vid den största öppningen uppstår då $u = \frac{1150v}{h_{max}}$. Notera i figur (4.7) att laminära flöden inte existerar i verklig körning. Det är också intressant att observera att flödes hastigheten uppnår ljudhastigheten redan vid större tryckkvoter än den kritiska. Vid nästan stängd trotteln går tryckkvoten mot den kritiska. Detta är en konsekvens av att areaökningen går mot oändligheten, vilket medför att all rörelsemängd går förlorad.

4.5 Jämförelse mellan beräknat och mätt massflöde

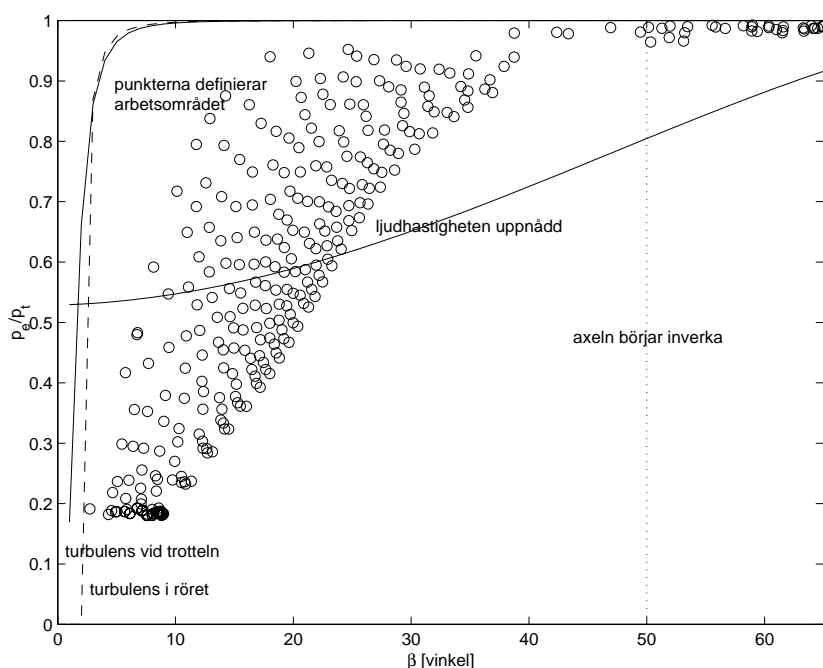
Modellen blir stegvis sämre för växande vinklar β . För att mer ingående studera när modellen börjar urarta har punkterna som representerar mätningar utförda i intervallet under 40° avbildats i figur (4.10).

För att få en uppskattning av spridningen av de punkter som stämmer bra har en minsta kvadratanpassad linje till punkterna under 30° subtraherats från punkterna. Lutningen är 1.1835 och skärningen med y-axeln $-5.37 \cdot 10^{-4}$ respektive 1.1773



Figur 4.6 Bilen visar en skiss över hur de olika trycken varierar längs röret vid trotteln. Det är intressant att notera att det statiska trycket vid kontraktionen, är lägre än totaltrycket efter trotteln. Den vanligaste massflödesberäkningen använder $\frac{p_e}{p_t}$ för att beräkna hastigheten vid trotteln, vilket enligt figuren ger en för låg hastighet.

och $-4.4 \cdot 10^{-4}$. I figur (4.10) verkar det uppenbart att modellens giltighet avtar redan vid $\beta = 30^\circ$. För vinklar mindre än 30° är standardavvikelsen av massflödet är $2.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}$ resp $7.6 \cdot 10^{-4} \text{ kg/s}$. Det är också intressant att relatera de avvikande punkterna till den mätta tryckkvoten. Eftersom trycket före trotteln justeras, kan justeringen i sig vara kritisk vid stora tryckkvoter. Jämför man kvoten mellan korrektionen och uppmätt tryckdifferens ligger de punkterna med god överensstämmelse, det vill säga vinklarna mindre än 30° , under 0.025. Sedan följer övre begränsningen för tidigare nämnda grupper 0.1, 0.3 och 5(68). Parentesen avser ett avvikande värde, där tryckdifferensen endast är 19Pa. I figur (4.12) är kurvorna för konstant massflöde inritade. Det framgår tydligt att arbetsområdet i övre högra hörnet är mycket känsligt för fel i tryckkvoten. Ett fel i korrektionen ger alltså stora fel i flödet i de grupper, där avvikelser har noterats.



Figur 4.7 Fasplan.

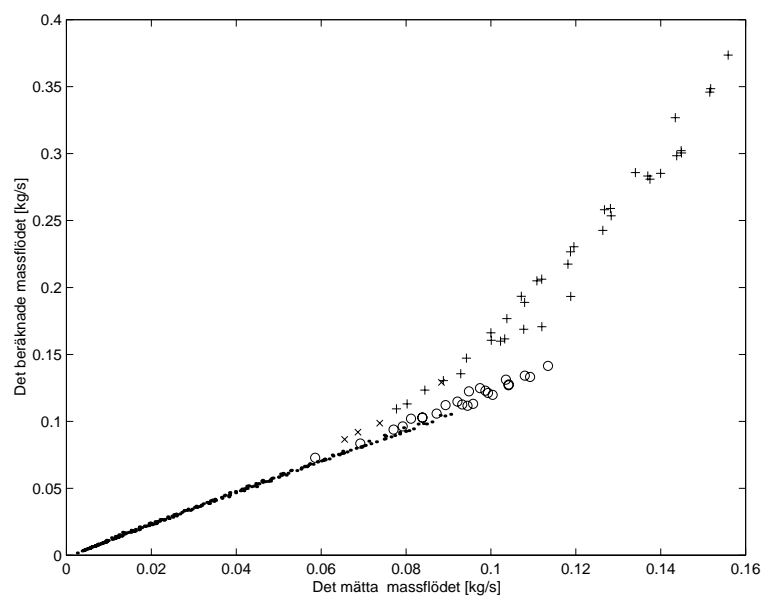
4.6 Förklaringar till avvikelser

Att avvikelser inträder vid mindre vinklar, än vad jag trodde, kan kanske förklaras på två sätt. För det första kan det tänkas att trottelaxeln påverkar flödet redan för mindre vinklar. Modellen överskattar flödet från ca 30°, vilket skulle kunna tyda på att en del av öppningen ovan axeln skymms av axeln. Den effektiva arean blir därmed mindre. Den andra tänkbara orsaken skulle kunna vara att flödesriktningen i öppningen börjar avvika från normalens riktning. Detta skulle också få till följd att flödet överskattas.

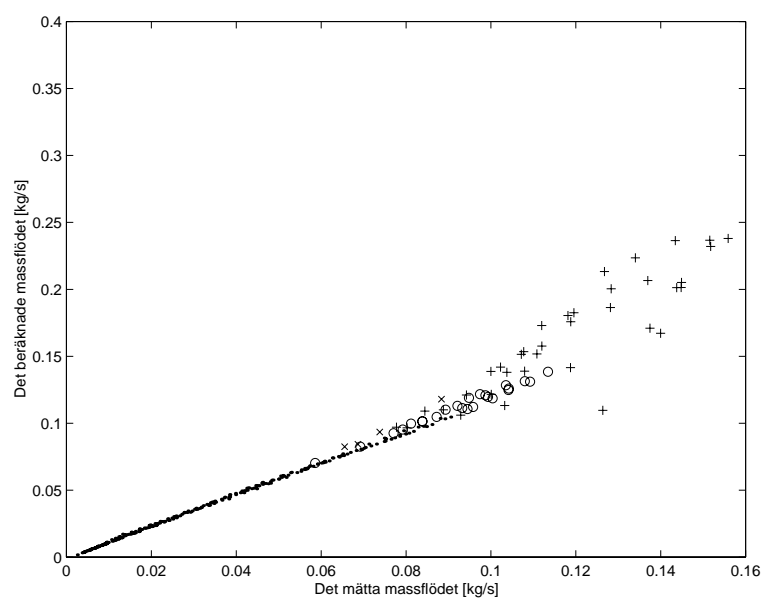
4.7 Algoritmbeskrivning

Giltigheten av vissa antaganden råder det fortfarande tvivel om, men jämförelserna med experimentella resultat tyder på att det finns värdefulla ide'er i arbetet. Förhoppningsvis saknas större felaktigheter i resonemanget som uppväger varandra i resultatet. Här följer en kortfattad beskrivning över vilka huvudfrågor som behandlats för att beräkna massflödet.

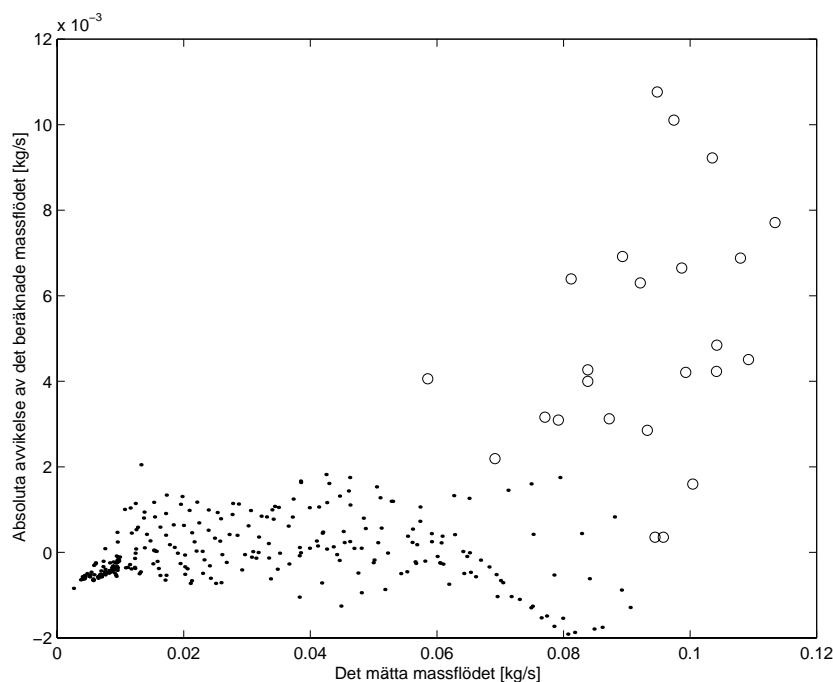
1. Identifiera vilken geometrisk begränsning som kommer att ge upphov till den minsta arean i samband med kontraktion.



Figur 4.8 Punkterna markerar mätningar för $\beta < 30^\circ$. Cirklarna markerar mätningar för $30^\circ \leq \beta < 40^\circ$, kryssen för $40^\circ \leq \beta < 50^\circ$ och slutligen representerar plustecknen mätningar i intervallet $50^\circ \leq \beta$



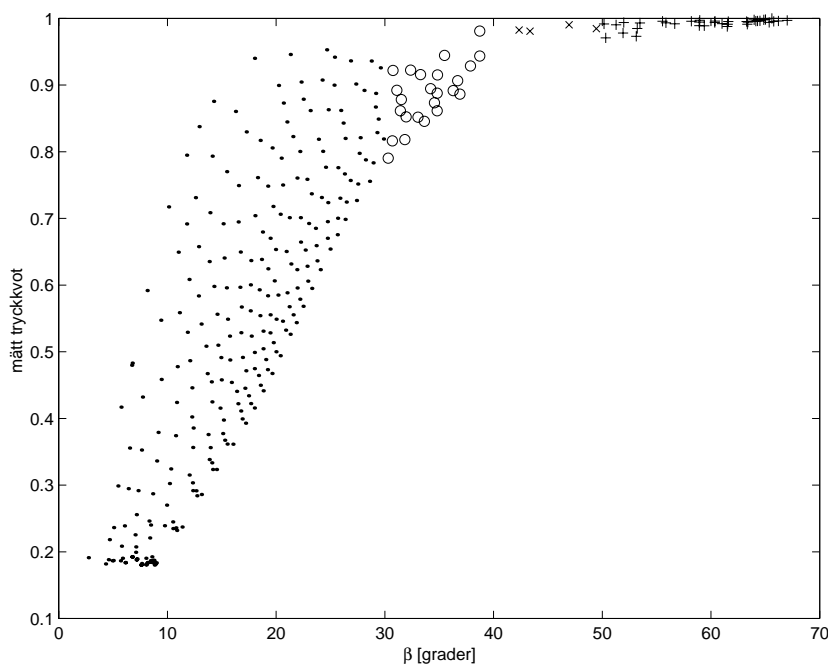
Figur 4.9 Punkternas olika betydelser är samma som i föregående figur. I denna beräkning är förlustkoefficienten för engångsförluster 0.6.



Figur 4.10 Punkterna markerar mätningar för $\beta < 30^\circ$. Cirklarna markerar mätningar för $30^\circ \leq \beta < 40^\circ$.

2. Avgör om det verkar rimligt att anta att flödet strömmar vinkelrätt mot den minsta arean.
3. Gör en lämplig indelning av öppningen/öppningarna med tanke på skillnader i flödets riktning in mot begränsningen.
4. Kontrollera att det finns utrymme efter minsta begränsning för en relativt ostörd kontraktion.
5. Beräkna avlänkningsvinkel för varje del.
6. Antag att tryckförlusten för flödet genom de olika delareorna är lika. Detta betyder att medelhastigheten är konstant för de olika delareorna vid försummande av friktion.
7. Beräkna kontraktionen och därigenom också den minsta area flödet ska passera.
8. Använd arean i föregående punkt och arean flödet ska expandera i. Förhållandet mellan areorna används för att beräkna massflödet

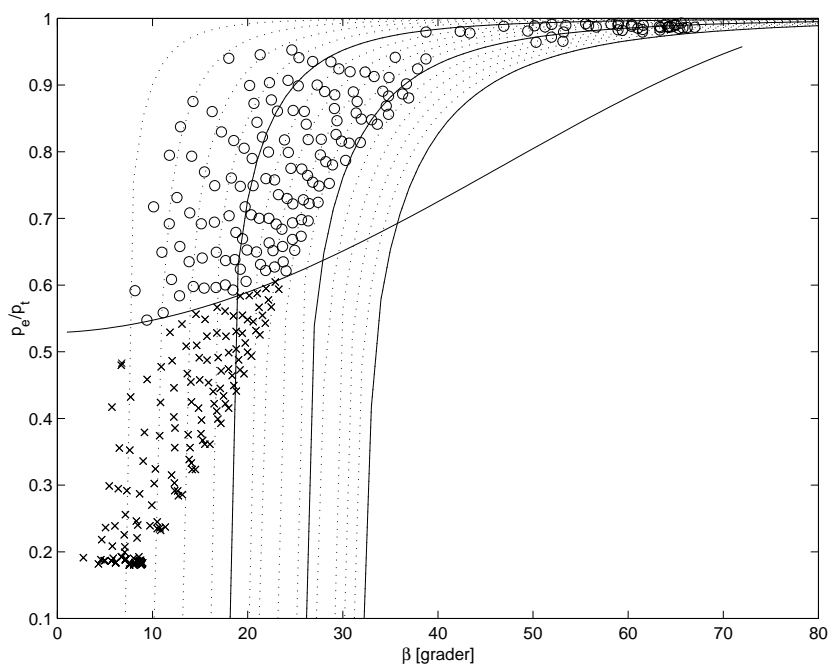
4.8. OBESVARDE FRÅGOR SOM UPPKOMMIT UNDER ARBETETS GÅNG.81



Figur 4.11 Punkterna markerar mätningar för $\beta < 30^\circ$. Cirklarna markerar mätningar för $30^\circ \leq \beta < 40^\circ$, kryssen för $40^\circ \leq \beta < 50^\circ$ och slutligen representerar plustecknen mätningar i intervallet $50^\circ \leq \beta$. I figuren framgår det tydligt att en stor tryckkvot kan vara en bidragande orsak till stora fel.

4.8 Obesvarade frågor som uppkommit under arbetets gång.

1. För att kunna beräkna massflödet för större vinklar måste modellen utvidgas med hur kontraktionen beror på munstyckets utformning, i detta fall hur kontraktionen sker över ett rundat föremål.
2. Det skulle också tillföra modellen extra precision, om det gick att beräkna längden från munstycke till kontraktion.
3. För att ytterligare få indikationer om modellens giltighet och nya ide'er är det intressant att studera tredimensionella simuleringar. Det vore också intressant med observationer som styrker eller förkastar antagandet om vinkelrät strömriktning vid begränsningen. Detta kommer också att ge ide'er om hur växlingen mellan den av axeln genererade kontraktionen och den av trottelpattan genererade kontraktionen sker för växande trottelvinkel.
4. Det återstår dessutom ett formellt bevis för att förlustkoefficienten vid expansion



Figur 4.12 Visar linjer där massflödet är konstant. Från vänster börjar det med 0.01kg/s och ökar med 0.01kg/s. De heldragna linjerna motsvarar massflöden på 0.05kg/s, 0.10kg/s och 0.15kg/s. Kurvorna borde vara lodräta under linjen som markerar att ljudhastigheten är uppnådd. Avvikelse beror på diskretisering av lösningen. För stora vinklar β , där de största korrektionerna av trycket för trotteln var nödvändiga, är massflödet starkt beroende av en korrekt tryckkvot.

sion kan beräknas på samma sätt i det kompressibla fallet som i det inkompressibla fallet.

5. För hastigheter nära ljudhastigheten är det intressant att studera hastighetsprofilen. Maxhastigheten är givetvis större än medelhastigheten, men vad händer då maxhastigheten närmar sig ljudhastigheten?
6. För överljudsfart stämmer modellen bra, men det är ändå inte ointressant att studera vad som händer med flödet vid sådana farter.
 - Det är inte orimligt att trycket efter trotteln kan påverka flödet även då det uppnått ljudhastigheten. Det måste röra sig om små effekter men åtminstone fluiddynamiskt intressant. Detta skulle också betyda att det blir möjligt att beräkna trycket efter trotteln som funktion av tillståndet före och massflödet, även då det i nuläget betraktas som strypt.
 - Är det möjligt att under rimliga antaganden beräkna kontraktionskoefficienten för överljudshastighet?

4.8. OBESVARDE FRÅGOR SOM UPPKOMMIT UNDER ARBETETS GÅNG.83

- Beskriv chockvågors utseende och fysikaliska egenskaper.
7. På den matematiska sidan är det givetvis intressant att beräkna mer allmängiltiga funktioner för längd och kontraktion av strålar.
 8. Hur stor är svängningen av massflödet förbi trotteln? Kan dessa variationer påverka massflödets tidsmedelvärde? Eventuellt skulle effekterna av detta kunna vara större då flödet i medel är nära ljudhastigheten, medan momentanflödet stryps under de perioder flödet är större.
 9. Har trotteln speciella arbetspunkter, där flödet är särskilt känsligt för störningar?
 10. Finns det andra typer av variabla stypningar, som både är tekniskt användbara och enklare att modellera, dvs är det möjligt att med den nya kunskapen designa en stypning, som undanröjer en del av svårigheterna?

Kapitel 5

Slutsatser

Metoden i rapporten kan med ganska god noggrannhet beräkna massflödet förbi trotteln, utan att använda några korrektionsfaktorer, som måste bestämmas för ett stort antal arbetspunkter. Arbetet har visat att en viktig parameter i beräkningen är den minsta tvärsnittsarea som flödet passerar, och egenskaper hos detta tvärsnitt. Ofta i litteraturen använder man projektion vinkelrätt röret, vilket leder till behov av korrektion [4]. Här har en noggrannare analys av minsta tvärsnittsarea för strömningen gjorts enligt följande principer.

Betrakta i röret med trotteln alla mängder av ytor, som uppfyller villkoret, att allt flöde flyter genom åtminstone en av ytorna i en mängd. Av alla mängder av ytor, som uppfyller villkoret, har mängden av ytor som skär de kontraherade strålarna efter trotteln i rät vinkel en av de minsta areorna. Flödet definierar ytans form, men flödet är inte känt. Detta gör det intressant att studera liknande ytor. En beskrivning av den yta som har utnyttjats i rapporten med mycket gemensamt med den intressanta ytan följer.

Betrakta i röret med trotteln alla ytor, som uppfyller villkoren, att ytans rand sammanfaller med röret och att allt flöde, som flyter genom röret också flyter genom ytan. Från varje yta tas snittet med trottelskivan bort. Av det som återstår av varje yta, är arean av den yta som konstrueras på följande sätt den minsta. Betrakta den ena delen av trottelskivan som blir kvar efter att snittet av alla punkter, som både tillhör trottelskivan och axeln borttagits. Delar av ytans rand sammanfaller med den böjda kanten av trotteldelen, som har minst radiellt avstånd till röret. Ytan följer punkterna från bågen i radiell led ut till röret. Symmetri kring trottelaaxeln skapar den andra halvan av ytan.

Huvudsakligen leder beräkningen till tre slutsatser:

1. Flödet vid trotteln kan inte approximeras som inkompressibelt flöde.
2. Behovet av korrektionsfaktor minskar genom att man vid areaberäkning i stället för standardsynsättet med projicerad area använder en strömningsmotiverad tvärsnittsarea.
3. Tryckkvoten som används för beräkning av massflöde ska vara det statiska trycket i kontraktionen dividerat med det totala trycket i kontraktionen. Det totala trycket i kontraktionen kan approximeras av totaltrycket strax före trotteln. Det statiska trycket beräknas med hjälp av tryckkvoten över trotteln samt formeln för förlustkoefficienten.

Den sistnämnda skillnaden får effekten att trotteln är strypt för större tryckkvoter än den kritiska.

Avslutningsvis visar en bra överensstämmelse mellan modell och mätningar att modellen fångar väsentliga beroenden mellan fenomen, som uppstår vid trotteln.

Litteraturförteckning

- [1] N. Frössling B. Appelqvist. *Grundläggande Strömningslära*. ITF, Chalmers Tekniska Högskola, 1977.
- [2] S. A. Chaplygin. Gas jets. Technical report, Scientific Memoirs, Moskva universitet, 1962.
- [3] M. I. Gurevich. *Theory of jets in ideal fluids*. Academic press Inc., 1965.
- [4] J. B. Heywood. *Internal Combustion Engine Fundamentals*. MacGraw-Hill Book Co., 1988.
- [5] R. V. Churchill J. W. Brown. *Complex variables and applications*. MacGraw-Hill Book Co., 1996.
- [6] J.H.Spurk. *Fluid Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1997.
- [7] D Loyd K. Stock, M. Karlsson. *Formelsamling i Strömningslära, Termodynamik och Värmeöverföring*. IKP, Linköpings Tekniska Högskola, 1996.
- [8] Böiers L-C. K.G. Andersson. *Ordinära differentialekvationer*. Studentlitteratur, Lund, 1992.
- [9] D. S. Miller. *Internal flow systems*. BHRA (information service), 1990.
- [10] A. Ramgard. *Vektoranalys*. Teknisk högskolelitteratur i Stockholm AB (THS AB), 1996.
- [11] H. Rouse. *Advanced Mechanics of fluids*. John Wiley & Sons, 1959.

Bilaga A

Appendix

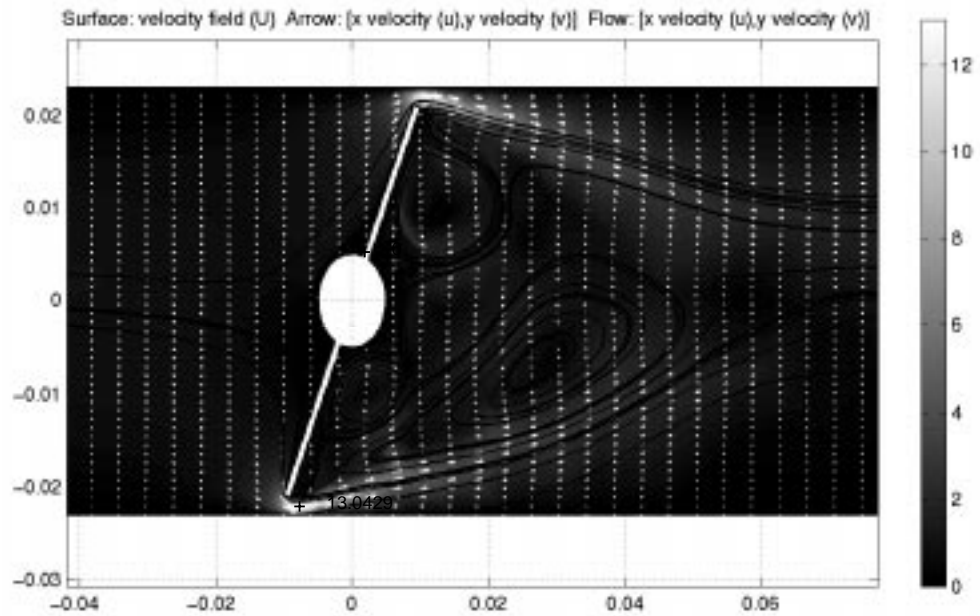
Resultatet av ett antal simuleringar som rapporten bygger på redovisas. Figurerna visar information på fyra sätt. De heldragna linjerna strömlinjer. Pilarna är hastighetsvektorer. Slutligen visas en egenskap hos flödet grafiskt genom en gråskala. Gråtonens betydelse varierar från bild till bild. Figurtexterna förklarar vad innebörden av gråtonen. Siffrorna med tillhörande x anger var och hur stor det största respektive det minsta värdet av den storhet som visas som gråton i bakgrunden.

Det är intressanta att studera hur kontraktionen uppstår i simuleringarna för olika vinklar. En av de fenomen som ska betraktas är vinkeln flödet har innan de böjs genom den övre eller undre springan. Denna riktning kommer att bestämma kontraktionen.

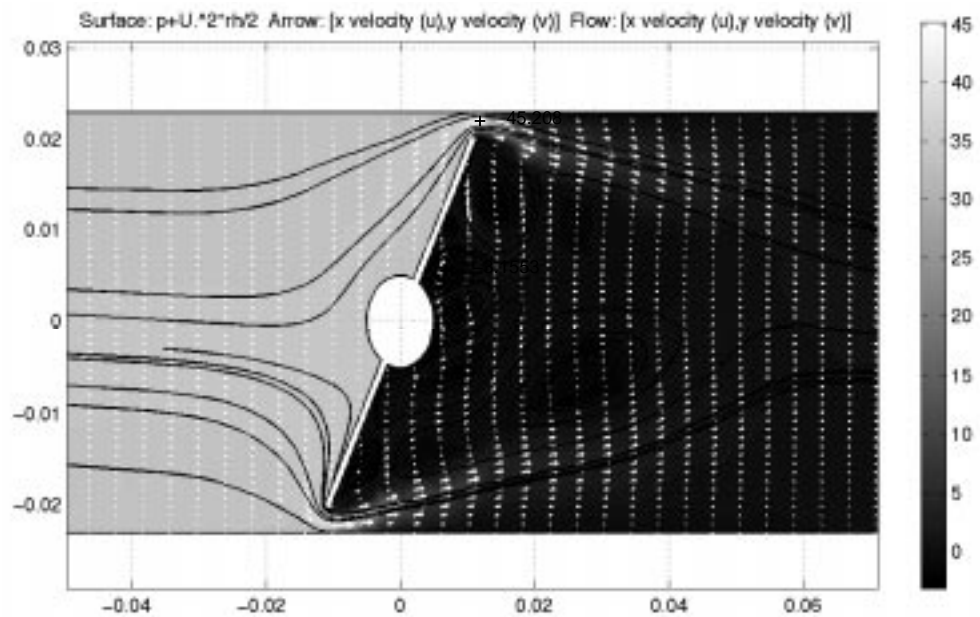
Exempel på andra intressanta observationer är att studera axelns inverkan på den övre öppningens kontraktion vid stora vinklar.

Bilderna visar också att det inte är självklart hur man ska definiera kontraktionen eftersom strålen inte har någon "kant".

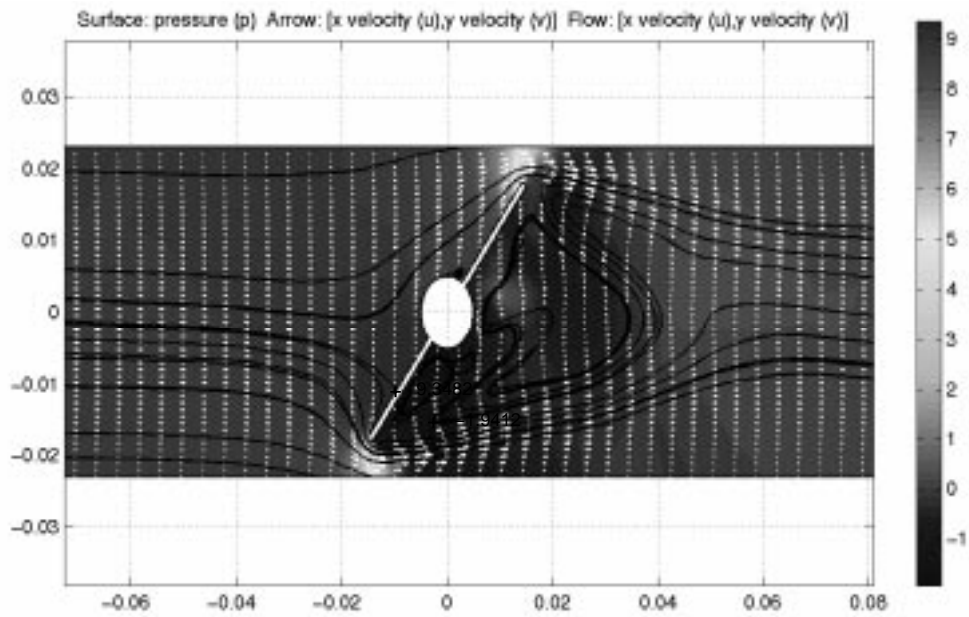
Slutligen är gråskalan av totaltrycket intressant. Figurerna visar tydligt hur förlusten till stor del sker under areaökningen.



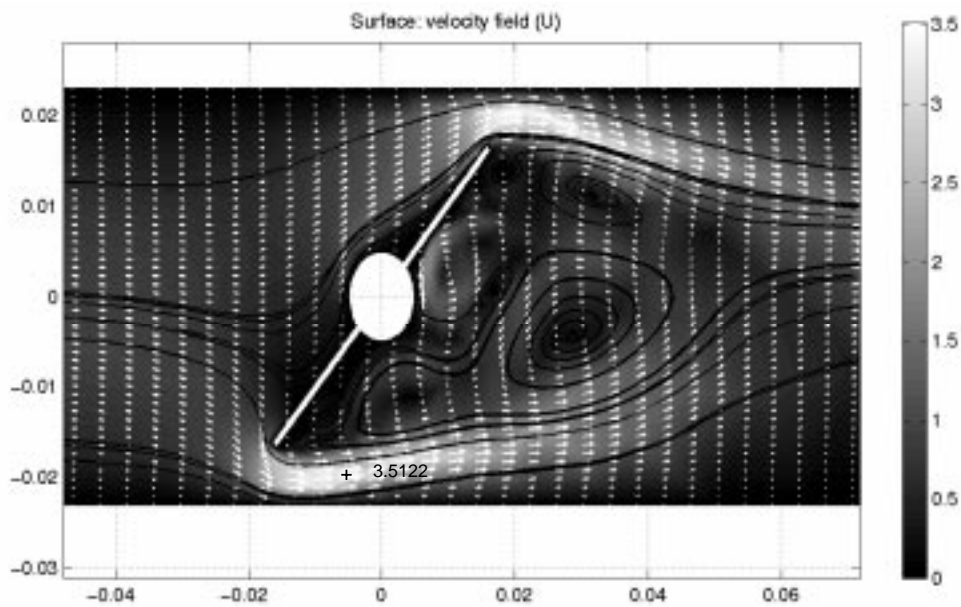
Figur A.1 Visar trotteln då öppningsvinkeln är $\beta = 20^\circ$ och maxhastigheten i inloppet är $\hat{u} = 1\text{m/s}$. Ytan gråskala visar hastigheten U av fluiden.



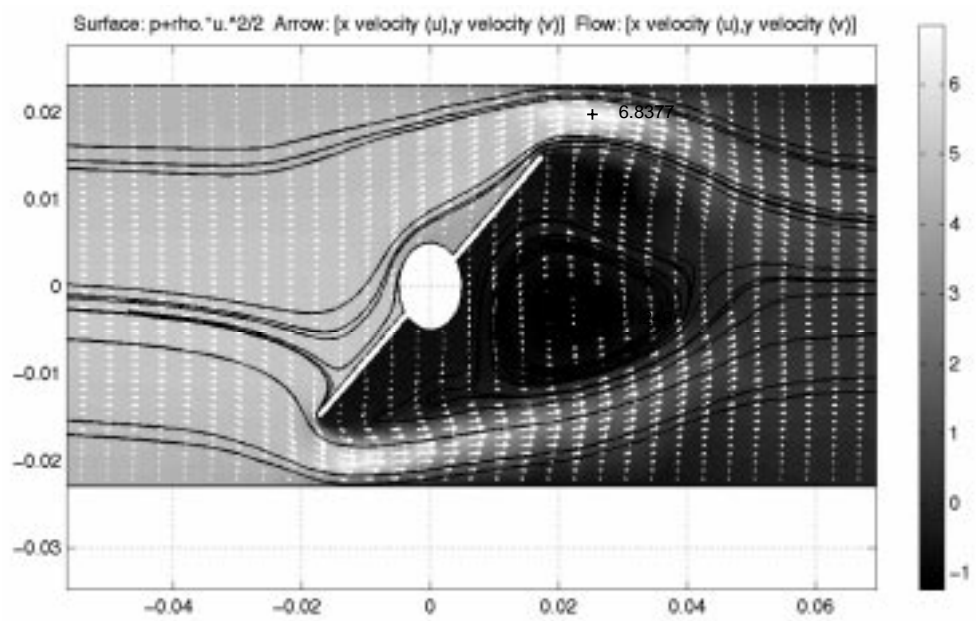
Figur A.2 $\beta = 24^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar totaltrycket, p_t .



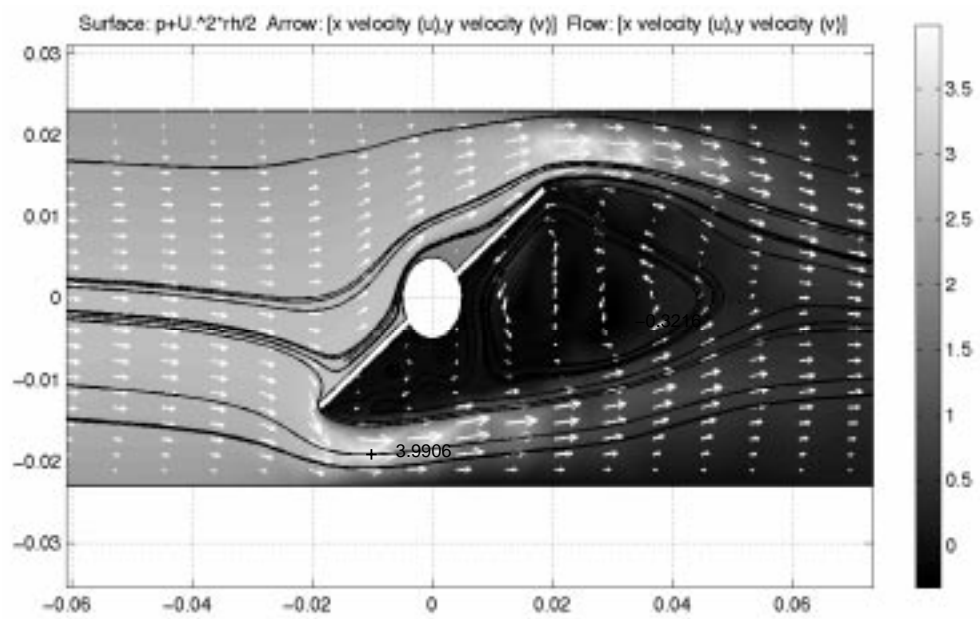
Figur A.3 $\beta = 35^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar det statistiska trycket, p .



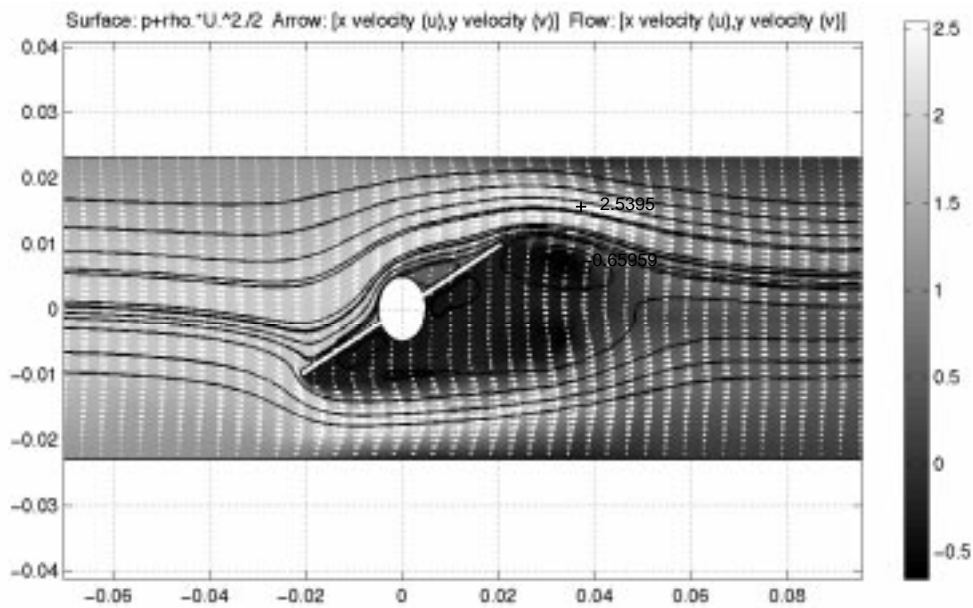
Figur A.4 $\beta = 40^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar hastigheten, U .



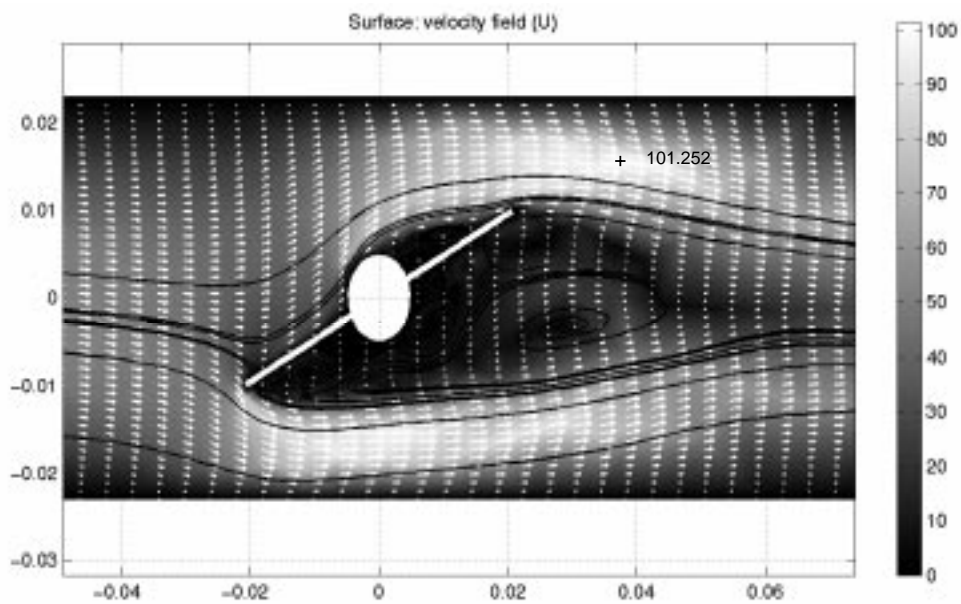
Figur A.5 $\beta = 45^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar totaltrycket, p_t .



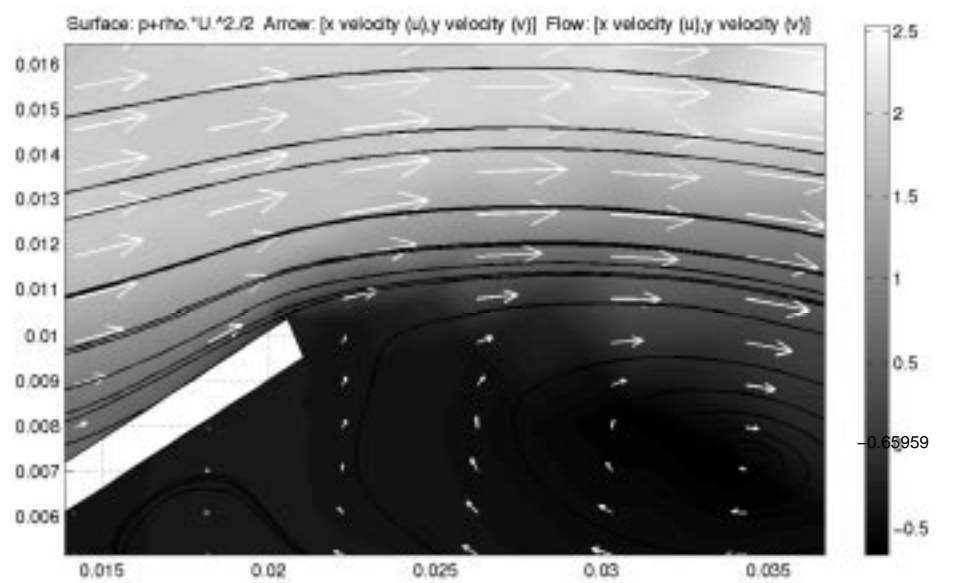
Figur A.6 $\beta = 50^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar totaltrycket, p_t .



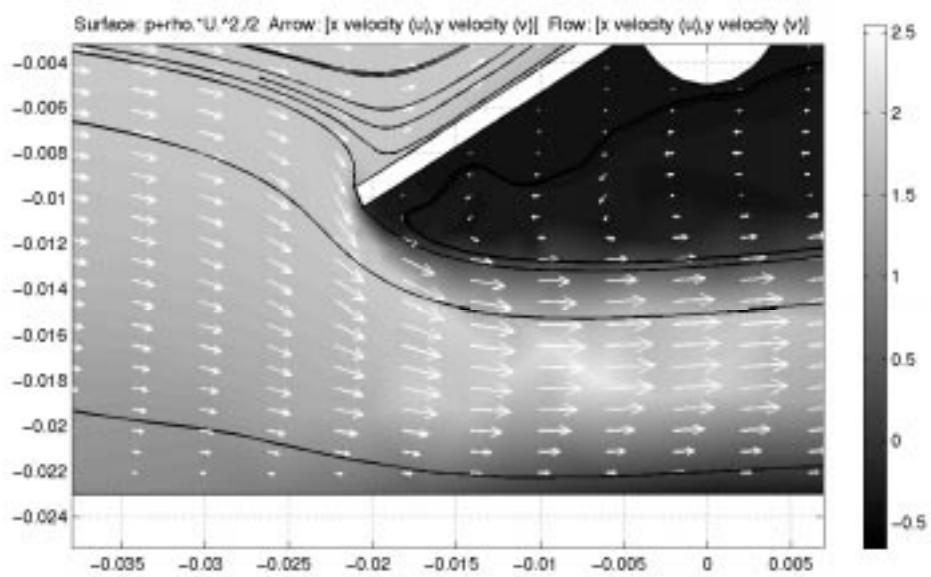
Figur A.7 $\beta = 60^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar totaltrycket, p_t .



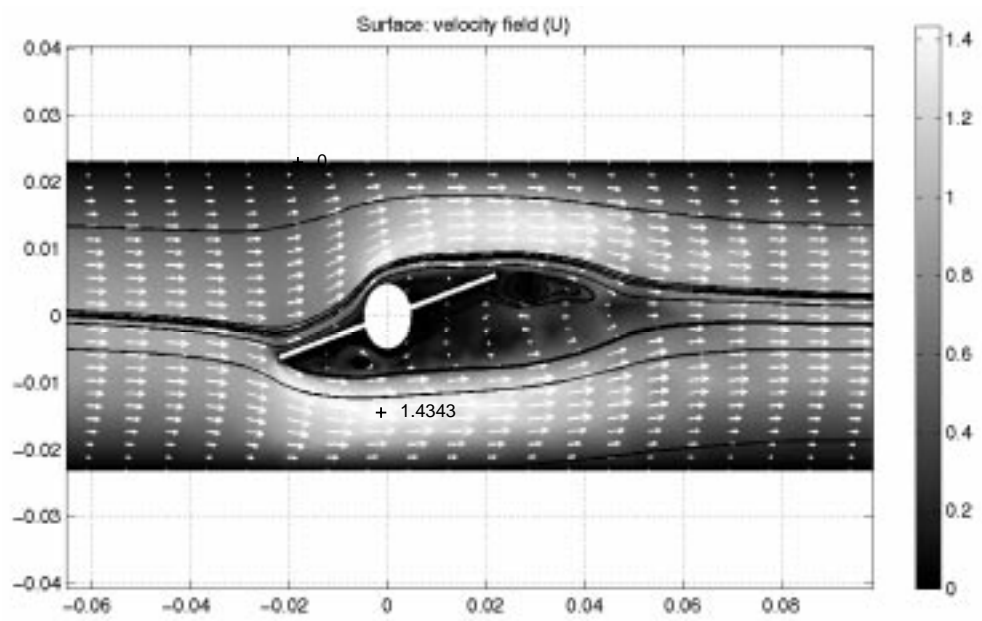
Figur A.8 $\beta = 60^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 50\text{m/s}$. Gråskalan representerar hastigheten, U . Jämför likheten mellan den här figuren med simuleringen i figur (A.7).



Figur A.9 Bilden visar en närbild av flödet vid den övre öppningen. $\beta = 60^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar totaltrycket, p_t .



Figur A.10 Bilden visar en närbild av flödet vid den undre öppningen. $\beta = 60^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1\text{m/s}$. Gråskalan representerar totaltrycket, p_t . Vid framsidan på trottnen ser man att flödet inte följer framsidan av trottnen ut till kanten. Detta gör att vinkelförändringen flödet genomgår från framkanten bli felberäknad.



Figur A.11 $\beta = 70^\circ$ och $\hat{u}_{in} = 1 \text{ m/s}$. Gråskalan representerar hastigheten, U .