Geometriska analys och designverktyg för olinjära system

Erik Frisk

frisk@isy.liu.se

Föreläsning 3a: In/Ut-representationer och in/ut-invarians

Introduktion

- Denna gången: in/ut invarians och in/ut representationer
- Varför denna fascination vid ovanstående? Utvidga och förklara kopplingar till störningsundertryckning, MIMO→SISO, residualgenerering.
- Lite kort om realisationsteori nu när man ändå är inne på I/O-representationer.

Förtydligande från förra föreläsningen

En sak som kom lite hastigt på förra föreläsningen får en liten förtydling.

Vad är sambandet mellan $\Delta_1 =< f, g|$span $\{g\} >$ och $\Delta_2 =< f|$span $\{g\} >$ i fallet att båda är involutiva? Det vi "egentligen ville räkna ut var Δ_1, men vi räknade ut Δ_2.

Direkt ses att $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, men när gäller att $\Delta_2 \subseteq \Delta_1$? Antag att Δ_1 är involutiv (det är ju sådana vi vill ha). Per definition gäller att

$$g \in \Delta_1, [g, \Delta_1] \subseteq \Delta_1 \text{ pga. att } \Delta_1 \text{är involutiv}$$

vilket ger att Δ_1 även är g-invariant.

Antag att Δ_1 (den vi ville räkna ut) är involutiv, då gäller att $\Delta_1 = \Delta_2$ (där Δ_2) var den vi faktiskt räknade ut).

In-ut representationer

Det finns lite olika sätt att representera det dynamiska sambandet mellan ut och insignal. Tillståndsformen är ett sätt.

Ett annat sätt är så kallade in-ut representationer, dvs. inga obekanta tillstånd finns med i beskrivningen.

- in-ut relationer

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + bu \\ y &= cx \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \dot{y} - ay - cbu = 0$$

- Fliess functional expansions
- Volterra-serier, en olinjär generalisering av faltningsintegraler
- ...

In-ut invarians: Ett litet exempel

$$x = gu$$
$$y = h(x)$$

Vi vill hitta ett sätt att beskriva om u ej påverkar y, dvs.
$< dh(x), g >= 0$
Definiera observationsrummet $\mathcal{O} =$ span $\{h(x)\}$ samt mängden

$$\Omega_{\mathcal{O}} = \{d\lambda : \lambda \in \mathcal{O}\}$$

Styrsignalen u påverkar ej y om och endast om

$$g \in \Omega_{\mathcal{O}}^{\perp}$$

dvs. påverkan av styrsignalen sker alltid ortogonalt mot det rum vi kan observera.

In-ut invarians

Vi kommer utföra ett liknande resonemang även för dynamiska system, dvs avgöra om u påverkar y i systemet:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$
$$y = h(x)$$

Vi behöver:

1. en motsvarighet till $\mathcal{O}$ för dynamiska system!
2. ett sätt att avgöra/karakterisera om $g \in \Omega_{\mathcal{O}}^{\perp}$.

Den senare punkten kommer ha kopplingar till förmiddagens övningar med invarianta distributioner.

Fliess functional expansions

Extremt grötig notation och index-fibbel i boken. Illustrerar den enkla principen för linjära system.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$y = Cx = Cx_0 + C\int_0^t Ax + Bu dt_1 = Cx_0 + CA\int_0^t x dt_1 + CB\int_0^t u dt_1 =$$
$$= Cx_0 + CAx_0\int_0^t dt_1 + CA^2\int_0^t\int_0^{t_1} x dt_2 dt_1 +$$
$$+ CAB\int_0^t\int_0^{t_1} u dt_2 dt_1 + CB\int_0^t u dt_1$$

$$\Omega_{\mathcal{O}} = \{C, CA, CA^2, \ldots, BC, BAC, BA^2C, \ldots\}$$

Tillbaka till olinjära fallet

Gör man samma tråkräkningar för det olinjära systemet så får man:

$$y = h(x_0) + L_f h(x_0)\int_0^t dt_1 + L_f^2 h(x_0)\int_0^t\int_0^{t_1} x dt_2 dt_1 +$$
$$+ L_g L_f h(x_0)\int_0^t\int_0^{t_1} u dt_2 dt_1 + L_g h(x_0)\int_0^t u dt_1$$

dvs.

$\mathcal{O} =$ span $\{h(x), L_f h(x), L_f^2 h(x), \ldots, L_g h(x), L_g L_f h(x), L_g L_f^2 h(x), \ldots\}$

och

$\Omega_{\mathcal{O}} =$ span $\{dh(x), dL_f h(x), dL_f^2 h(x), \ldots, dL_g h(x), dL_g L_f h(x), dL_g L_f^2 h(x)$

In-ut invarians via observation space

$$y = h(x_0) + L_f h(x_0) \int_0^t dt_1 + L_f^2 h(x_0) \int_0^t \int_0^{t_1} x dt_2 dt_1 + \\ + L_g L_f h(x_0) \int_0^t \int_0^{t_1} u dt_2 dt_1 + L_g h(x_0) \int_0^t u dt_1$$

Vill man nu att insignalen u ej ska påverka utsignalen y så måste alla koefficienter framför u vara 0, dvs:

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= 0 \\ L_g L_f h(x) &= 0 \\ L_g L_f^2 h(x) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} < dh, g > (x) &= 0 \\ < dL_f h, g > (x) &= 0 \\ < dL_f^2 h(x), g > &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

In-ut invarians via observation space

$$\begin{aligned} < dh, g > (x) &= 0 \\ < dL_f h, g > (x) &= 0 \\ < dL_f^2 h(x), g > &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow g \in \Omega_{\mathcal{O}}^{\perp}$$

Med dessa räkningar kan man skriva ett resultat som är ekvivalent med vår ursprungliga lilla ansats

Lemma 3.3.2(i): Styrsignalen u påverkar ej y om och endast om

$$g \in \Omega_{\mathcal{O}}^{\perp}$$

Problem: Distributionen $\Omega_{\mathcal{O}}$ är inte ändlig och är allmänt otrevlig. Vi kan inte räkna ut den. Vi behöver något liknande det vi redan gjort som är ekvivalent med ovanstående.

Koppling till invarianter

Med våra gamla kunskaper så finns det anledning att tro att om det existerar en distribution Δ för vilken det gäller att

- Δ är invariant under f och g
- span $\{g\} \subseteq \Delta$
- $\Delta \subseteq \ker dh$

är ekvivalent med $g \in \Omega_{\mathcal{O}}^{\perp}$.

Visa med en uppdelning igen.

Lemma 3.3.2 (ii): $g \in \Omega_{\mathcal{O}}^{\perp} \Leftrightarrow < f, g | \text{span } \{g\} > \subseteq \ker dh$

Gott! Ty $< f, g | \text{span } \{g\} >$ är något vi lärt oss hur man räknar ut.

Om tid finnes

Skissa bevisidé för

$$g \in \Omega_{\mathcal{O}}^{\perp} \Leftrightarrow < f, g | \text{span } \{g\} > \subseteq \ker dh$$

Lite reklam för realisationsteori

Realisationsteori är att givet en in/ut representation (Fliess functional expansion/Volterra/i/o-relation) hitta en tillståndsbeskrivning för samma system.

Exempel: I/O-relation till tillståndsform där lösningen är långt ifrån trivial:

$$\frac{1}{2}y\ddot{y} + \frac{1}{4}y^{5/2} - \dot{y}^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \\ y &= \sqrt{x_1} \end{aligned}$$

"*Lowering the Orders of Derivatives of Controls in Generalized State Space Systems*", E. Delaleau och W. Respondek, J. Math. Sys. , Est., and Control, 5(3), 1-27, 1995.

Tillämpbart bl.a. inom olinjär residualgenerering, modellförenkling, och lite annat.