Fordonsdynamik med reglering

Jan Åslund
jaasl@isy.liu.se
Associate Professor

Dept. Electrical Engineering
Vehicular Systems
Linköping University
Sweden

Föreläsning 8

Laterala och longitudinella krafter

Vi har hittills studerat laterala och longitudinella krafter separat.

Fallet med både laterala och longitudinella krafter är mer komplext.

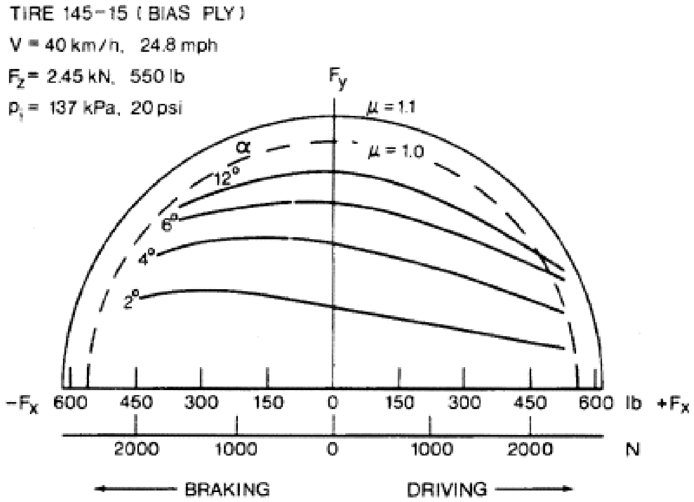
Figur 1.39 visar hur sambandet mellan dessa krafter och avdriftsvinkeln kan se ut.

En enkel modell för sambandet mellan F_x, F_y och α är att anta att kurvorna i figuren är ellipser.

När vi konstruerar ellipserna utgår vi från att följande är känt:

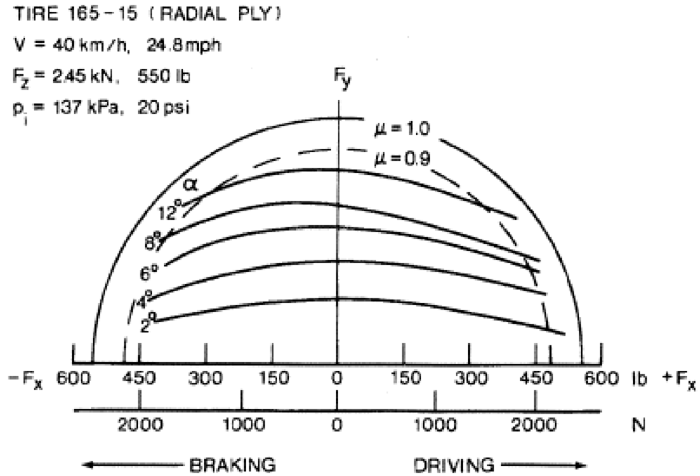
- Sambandet mellan F_y och α i fallet $F_x = 0$.
- F_{xmax} i fallet $F_y = 0$.

Figur 1.39a



(a)

Figur 1.39b



(b)

Friktionsellipsen: Arbetsgång

Arbetsgång:

1) Givet en avdriftsvinkel α beräknas $F_{y\alpha}$ då $F_x = 0$, t.ex. genom att läsa av figur 1.23 eller motsvarande.

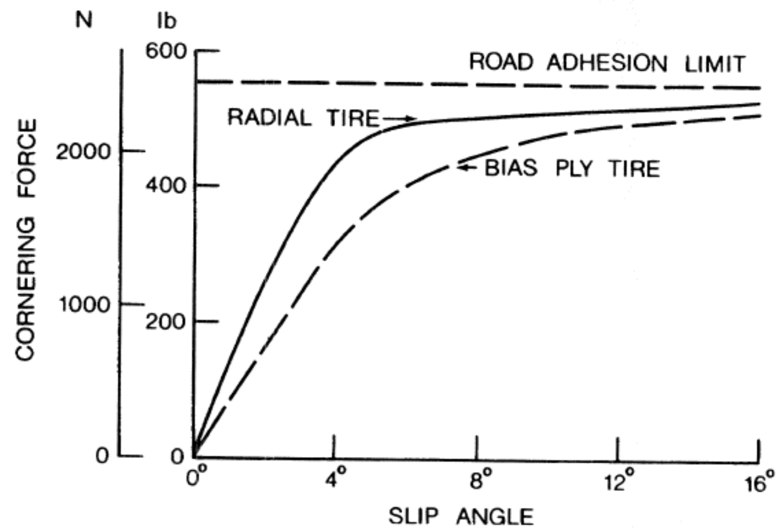
2) Maximala longitudinella kraften F_{xmax} i fallet $F_y = 0$ är känd.

3) F_{xmax} och $F_{y\alpha}$ är halvaxlarna i ellipsen

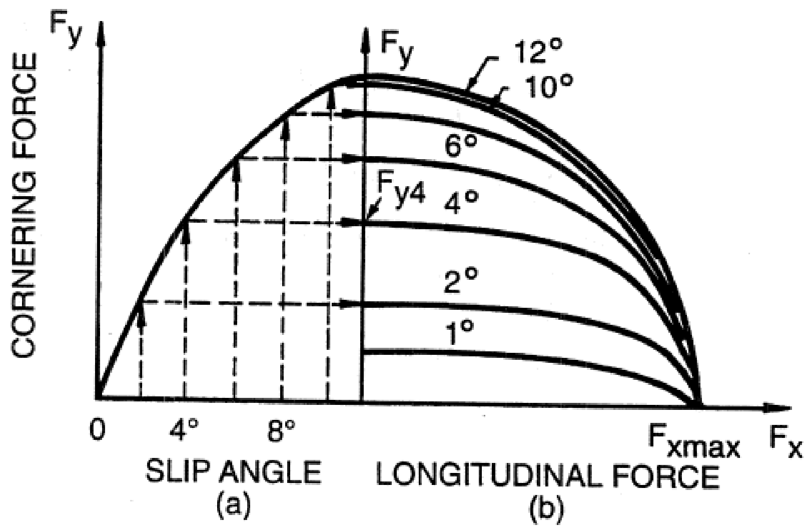
$$(F_y/F_{y\alpha})^2 + (F_x/F_{xmax})^2 = 1$$

Figur 1.42 illustrerar hur ellipserna ges av F_{xmax} och kurvan $F_y(\alpha)$.

Figur 1.23



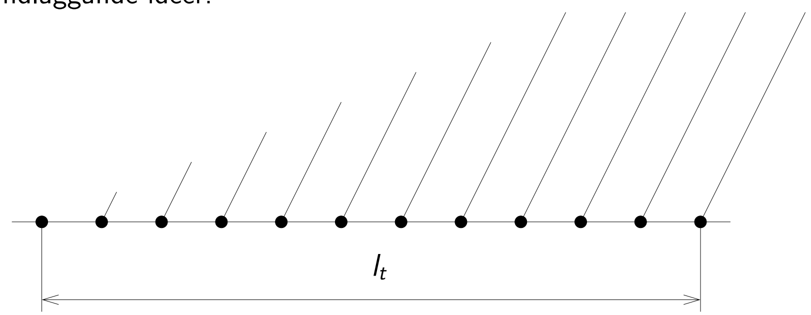
Figur 1.42



Borstmodellen

Tidigare har vi använt borstmodellen för lateral och longitudinella krafter separat. Modellen går lätt att utvidga till det allmänna fallet.

Grundläggande idéer:



Borstmodellen

Longitudinell förskjutning

$$\frac{i_s}{1-i_s}x$$

Lateral förskjutning

$$y' = \frac{\alpha}{1-i_s}x$$

Longitudinell kraft med linjär modell:

$$\frac{dF_x}{dx} = \frac{k_t i_s}{1-i_s}x$$

Lateral kraft med linjär modell

$$\frac{dF_y}{dx} = \frac{k_y' \alpha}{1-i_s}x$$

Borstmodellen

Friktionsmodell:

$$\sqrt{\left(\frac{dF_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF_y}{dx}\right)^2} \leq \mu \frac{W}{l_t}$$

I vilozonen:

$$\sqrt{\left(\frac{k_t i_s}{1-i_s}\right)^2 + \left(\frac{k_y' \alpha}{1-i_s}\right)^2} \cdot x \leq \frac{\mu W}{l_t}$$

Borstmodellen

Längden på vilozonen ges av

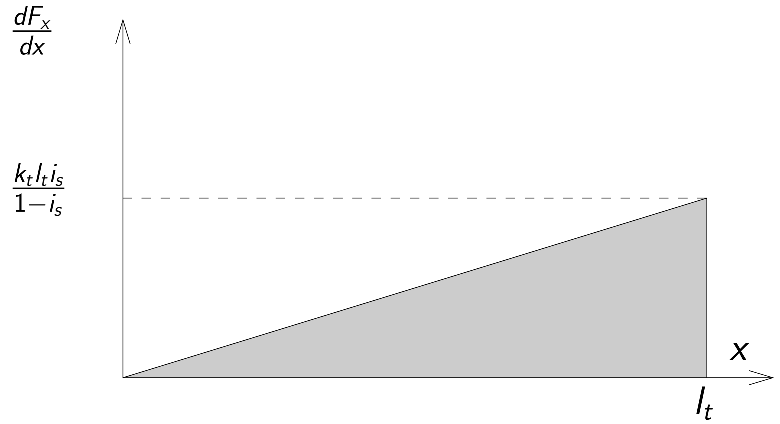
$$\frac{l_c}{l_t} = \frac{\mu W(1-i_s)}{2\sqrt{(C_s i_s)^2 + (C_\alpha \alpha)^2}}$$

där

$$C_s = \frac{k_t {l_t}^2}{2}$$
$$C_\alpha = \frac{k_y' {l_t}^2}{2}$$

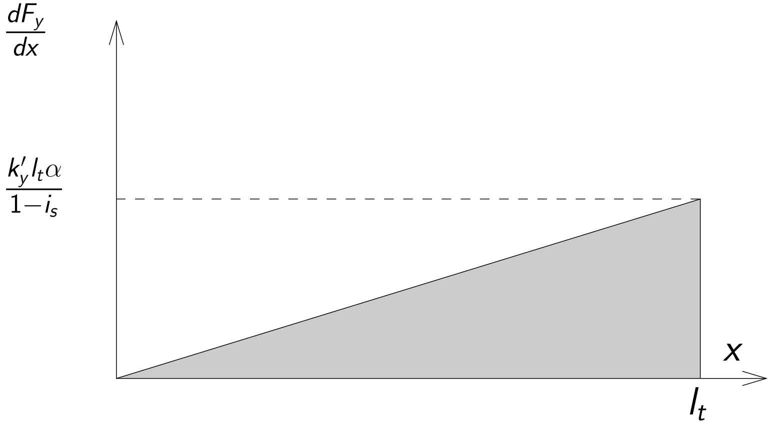
Om $l_c/l_t \geq 1$ så finns ingen glidzon

Borstmodellen: Utan glidzon



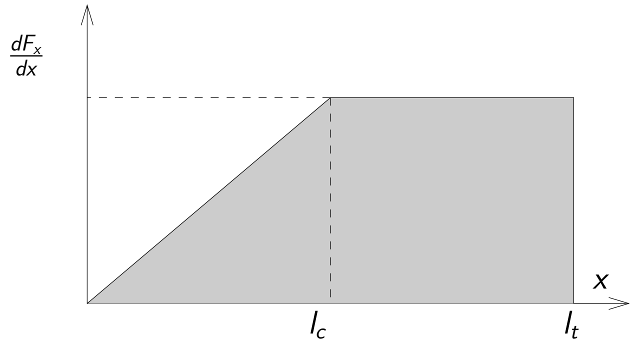
$$F_x = \frac{1}{2}\frac{k_t i_s l_t}{1-i_s} l_t = C_s \frac{i_s}{1-i_s}$$

Borstmodellen: Utan glidzon



$$F_y = \frac{1}{2}\frac{k_y' \alpha l_t}{1-i_s} l_t = C_\alpha \frac{\alpha}{1-i_s}$$

Borstmodellen: Med glidzon

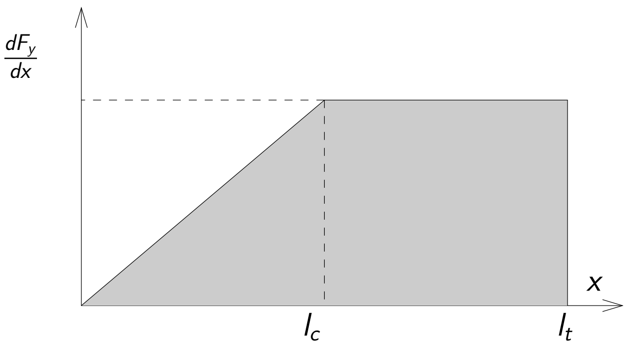


I glidzonen gäller att

$$\frac{dF_x}{dx} = \frac{\mu W}{l_t} \frac{C_s i_s}{\sqrt{(C_s i_s)^2 + (C_\alpha \alpha)^2}}$$

Kraften F_x ges av den skuggade arean under kurvan

Borstmodellen: Med glidzon



I glidzonen gäller att

$$\frac{dF_y}{dx} = \frac{\mu W}{l_t} \frac{C_\alpha \alpha}{\sqrt{(C_s i_s)^2 + (C_\alpha \alpha)^2}}$$

Kraften F_y ges av den skuggade arean under kurvan

Vattenplaning

Viskoplaning orsakas av ett tunt vattenskikt mellan vägen och däcket (vattendjup: 0.5 mm). Detta tunna vattenskikt bryter den molekylära länken mellan gummit och vägen. Greppet försvinner helt och det finns inget som hindrar fordonet från att glida.

Vattenplaning medför att man successivt tappar kontakten med vägen genom att ett lager vatten (vattendjup $\geq$ 0,5 mm) bildas mellan däcken och vägen p.g.a. fordonets hastighet. Hastigheten orsakar ett ökat vattentryck framför däcken, som gör att däcken gradvis lyfter från vägen. I takt med att hastigheten ökar blir vattenkilen under däcken större och till slut tappar däcken all kontakt med vägen.

Mer detaljer hittar du här: www.michelin.se

Vattenplaning

Faktorer som påverkar vattenplaning:

- Hastighet
- Vattennivå
- Däckets kontaktyta
- Däckets mönster

Vattenplaning

Enkel modell för lyftkraften:

$$F_h = k \varrho_f A V^2$$

där ϱ_f vattnets densitet, A är kontaktytans area, V bilens hastighet

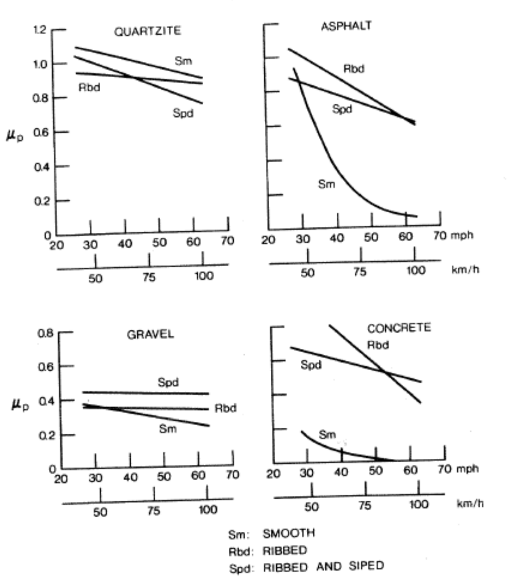
Empirisk formel för hastighet då vattenplaning inträffar:

$$V_p = 6.34\sqrt{p_i} \; km/h$$

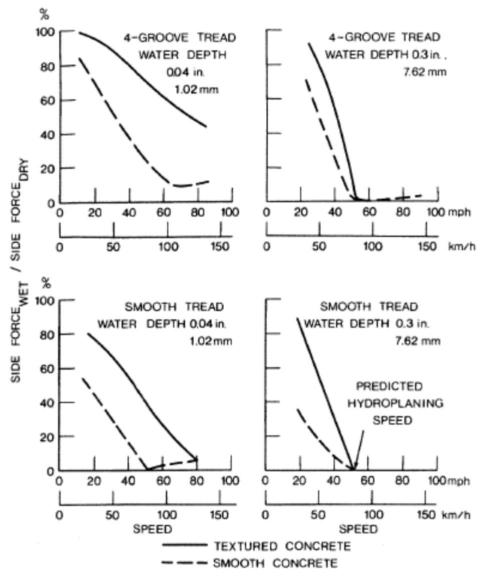
där p_i är trycket i däcket mätt kPa.

Figur 1.47 visar hur friktionskoefficienten varierar med hastigheten för olika däcktyper och underlag. Figur 1.51 visar sidkraften.

Figur 1.47

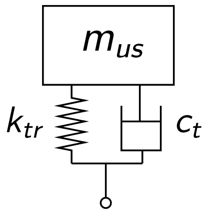


Figur 1.51



Däckmodeller

En enkel däckmodell med en fjäder och en dämpare:



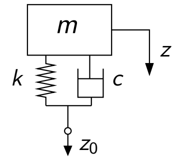
Parametrarna k_{tr} och c_t måste identifieras.

Tre intressanta fall:

- Statisk styvhet
- Dynamisk styvhet för ickerullande hjul
- Dynamisk styvhet för rullande hjul

Kvartsbilsmodell: Exempel

Betraktar en kvartbilsmodell med en fjädrad massa $m = 450\ kg$, en fjäder med fjäderkonstant $k = 25\ kN/m$ och en dämpare med dämpkonstant $c = 2\ kNs/m$.



Bilen kör på en sinusformad väg med våglängd $\lambda = 20\ m$ och amplitud $Z = 5\ cm$ och håller hastigheten $v = 60\ km/h$. Vilka värden kommer kraften mellan däck och väg att variera mellan?

Exempel

Frekvensen för svängningen är

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = 5.34 rad/s$$

Överföringsfunktion från z_0 till kraften:

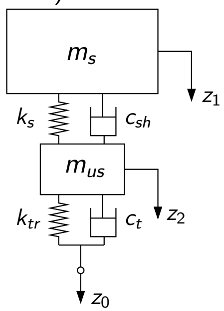
$$G(s) = \frac{ms^2(cs+k)}{ms^2+cs+k}$$

Kraften varierar mellan

$$mg - |G(i\omega)|Z = 3.4\ kN \text{ och } mg + |G(i\omega)|Z = 5.4\ kN$$

Kvartsbilsmodell

En modell med den fjädrade massan m_s (karossmassa) och den ofjädrade massan m_{us} (hjul- och axelmassa).



Dynamiska ekvationer

$$m_s\ddot{z}_1 + c_{sh}(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_s(z_1 - z_2) = 0$$
$$m_{us}\ddot{z}_2 + c_{sh}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k_s(z_2 - z_1) + c_t\dot{z}_2 + k_{tr}z_2 = c_t\dot{z}_0 + k_{tr}z_0$$

Odämpat system

Utan dämpning och med $z_0 = 0$ får vi

$$\begin{aligned} m_s \ddot{z}_1 + k_s z_1 - k_s z_2 &= 0 \\ m_{us} \ddot{z}_2 - k_s z_1 + (k_s + k_{tr}) z_2 &= 0 \end{aligned}$$

Kan skrivas

$$M\ddot{\mathbf{z}} + A\mathbf{z} = 0$$

där matriserna

$$M = \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_{us} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s + k_{tr} \end{bmatrix}$$

är positivt definita och symmetriska.

Odämpat system

Systemet har lösningar på formen:

$$\begin{aligned} z_1 &= Z_1 \cos(\omega_n t - \varphi) \\ z_2 &= Z_2 \cos(\omega_n t - \varphi) \end{aligned}$$

Vinkelfrekvenserna ω_n ges av den karakteristiska ekvationen

$$\det(-\omega_n^2 M + A) = 0$$

och egenvektorerna

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

ges av det homogena ekvationssystemet

$$(-\omega_n^2 M + A) Z = 0$$

Odämpat system

Lösningarna till den karakteristiska ekvationen ges av

$$\omega_n^2 = \frac{B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4A_1 C_1}}{2A_1}$$

där

$$\begin{aligned} A_1 &= m_s m_{us} \\ B_1 &= m_s k_s + m_s k_{tr} + m_{us} k_s \\ C_1 &= k_s k_{tr} \end{aligned}$$

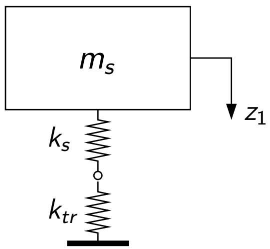
Ofta är konstanterna k_s, m_{us} små jämfört med k_{tr} resp. m_s.

Odämpat system: Approximation

För första lösningen fås approximationen

$$\begin{aligned} \omega_{n1}^2 &= \frac{B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4A_1 C_1}}{2A_1} = \frac{2C_1}{B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4A_1 C_1}} \\ &\approx \frac{C_1}{B_1} \approx \frac{k_s k_{tr}}{m_s k_s + m_s k_{tr}} = \frac{(1/k_s + 1/k_{tr})^{-1}}{m_s} \end{aligned}$$

Samma vinkelhastighet som för två seriekopplade fjädrar och en massa m_s:

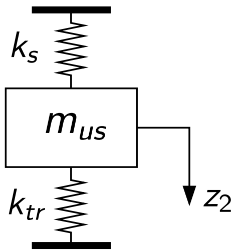


Odämpat system: Approximation

Approximation av den andra vinkelhastigheten:

$$\omega_{n2}^2 = \frac{B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2A_1} \approx \frac{B_1}{A_1}$$
$$\approx \frac{m_s k_s + m_s k_{tr}}{m_s m_{us}} = \frac{k_s + k_{tr}}{m_{us}}$$

Samma som för två parallellkopplade fjädrar och en massa m_{us}:



Dämpat system

Tar vi med dämpning får vi systemet

$$M\ddot{\mathbf{z}} + C\dot{\mathbf{z}} + A\mathbf{z} = \mathbf{f}(t)$$

där

$$C = \begin{bmatrix} c_{sh} & -c_{sh} \\ -c_{sh} & c_{sh} + c_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_t \dot{z}_0 + k_{tr} z_0 \end{pmatrix}$$

Genom att transformera systemet får vi

$$G(s)\tilde{z}(s) = \tilde{f}(s)$$

där

$$G(s) = s^2 M + sC + A$$

Dämpat system

Försummar dämpningen i däcket och antar i fortsättningen att $c_t = 0$.

Med

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix}$$

och

$$\tilde{f}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ k_{tr}\tilde{z}_0(s) \end{pmatrix}$$

får vi sambandet

$$\begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} = \frac{k_{tr}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} \begin{pmatrix} -g_{12}\tilde{z}_0 \\ g_{11}\tilde{z}_0 \end{pmatrix}$$

Dämpat system: Förstärkning

Om vägprofilen är en harmonisk svängning med amplitud Z_0 och vinkelfrekvens ω, så är z_1 och z_2 harmoniska svängningar med amplitud Z_1 resp. Z_2.

Förstärkningarna ges av:

$$\frac{Z_1}{Z_0} = \left| \frac{k_{tr} g_{12}(i\omega)}{g_{11}(i\omega)g_{22}(i\omega) - g_{12}(i\omega)g_{21}(i\omega)} \right|$$

$$\frac{Z_2}{Z_0} = \left| \frac{k_{tr} g_{11}(i\omega)}{g_{11}(i\omega)g_{22}(i\omega) - g_{12}(i\omega)g_{21}(i\omega)} \right|$$

Dämpat system: Förstärkning

Uttryckt i de ursprungliga storheterna:

$$\frac{Z_1}{Z_0} = \sqrt{\frac{A_2}{B_2 + C_2}}$$
$$\frac{Z_2}{Z_0} = \sqrt{\frac{A_3}{B_2 + C_2}}$$

där

$$A_2 = (k_s k_{tr})^2 + (c_{sh} k_{tr} \omega)^2$$
$$A_3 = (k_{tr}(k_s - m_s\omega^2))^2 + (c_{sh} k_{tr} \omega)^2$$
$$B_2 = ((k_s - m_s\omega^2))(k_{tr} - m_{us}\omega^2) - m_s k_s \omega^2)^2$$
$$C_2 = (c_{sh})^2(m_s\omega^2 + m_{us}\omega^2 - k_{tr})^2$$

Prestanda: Vibrationsisolering

Förstärkning beror av vinkelfrekvensen och detta samband kan åskådliggöras i ett bodediagram med logaritmiska skalor.

Figurerna 7.9–11 visar hur förstärkningen för den fjädrade massan varierar när man ändrar

- Ofjädrade massan m_{us}
- Styvheten för fjädringen k_s
- Dämpfaktorn γ

Prestanda: Fjädringsamplitud

Som ett mått på hur mycket hjulfjädringen sträcks ut använder vi förstärkningen

$$\frac{\max(z_2 - z_1)}{Z_0}$$

Figurerna 7.12–14 visar hur förstärkningen för den fjädrade massan varierar när man ändrar

- Ofjädrade massan m_{us}
- Styvheten för fjädringen k_s
- Dämpfaktorn γ

Prestanda: Väghållning och hjulhopp

Blir skillnaden $z_0 - z_2$ för stor tappar däcket kontakten mot underlaget.

Figurerna 7.15–17 visar hur förstärkningen

$$\frac{\max(z_0 - z_2)}{Z_0}$$

varierar när man ändrar

- Ofjädrade massan m_{us}
- Styvheten för fjädringen k_s
- Dämpfaktorn γ

Olinjära dämpare

I verkligheten är en linjär modell för dämparen inte alltid realistisk.