

## Vehicle Dynamics and Control

Jan Åslund  
jaasl@isy.liu.se  
Associate Professor

Dept. Electrical Engineering  
Vehicular Systems  
Linköping University  
Sweden

### Lecture 7

Kärt barn har många namn

AYC - Active Yaw Control  
VDC - Vehicle Dynamics Control  
ESP - Electronic Stability Program

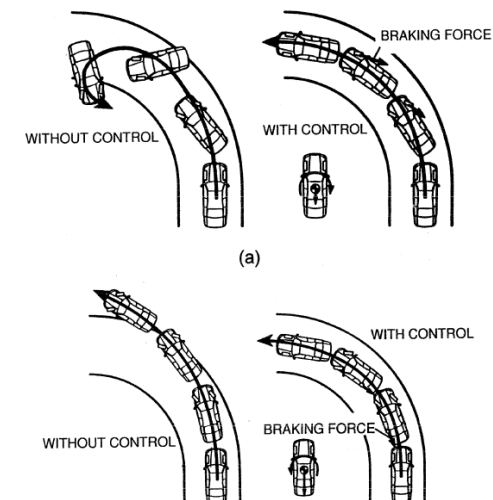
I fortsättningen används ESP som gemensam förkortning eftersom den är vanligast åtminstone för tillfället.

## ESP: Övergripande funktion

För att uppnå önskad funktion behöver man

- Beskriva bilens önskade beteende. Detta är inte trivialt eftersom det kräver en uppfattning om förarens önskan.
- Beskriva bilens aktuella beteende.
- Relatera till de sensorer och aktuatorer som finns, och till underliggande reglersystem.
- Ta hänsyn till förarens beteende i en pressad situation.
- Utforma ett styrsystem baserat på ovanstående.

## Figur 5.24

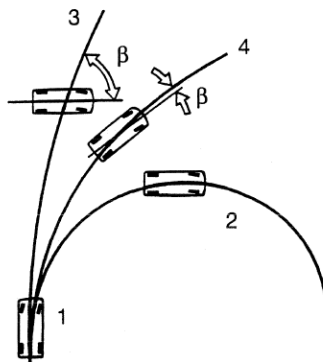


Skapa ett sladdhämmande moment  $\Delta M$  baserat på bilens uppförande jämfört med önskat beteende.

Vi börjar med att titta på kraven på kunskap om bilens aktuella uppförande.

Hur många variabler behövs?

## Figur 5.23



- 1 STEP INPUT AT STEERING WHEEL
- 2 ON HIGH FRICTION ROAD
- 3 ON SLIPPERY ROAD WITH STEERING CORRECTION AND YAW RATE CONTROL
- 4 ON SLIPPERY ROAD WITH BOTH YAW RATE AND SIDE SLIP ANGLE CONTROL

Hur beter sig en bil i stabil kurvtagning (relaterat till dynamiska variabler)?

En bil med konstant fart i en kurva med konstant krökning har konstant  $\Omega_z$ , dvs konstant girvinkelhastighet (yaw-rate på engelska och ofta betecknad  $\Psi$ ).

Ett första villkor på reglerfunktionen:

Reglera  $\Omega_z$

Detta är bakgrunden till den ursprungligen vanliga termen AYC - Active Yaw(-rate) Control

Det är viktigt att inse att det inte räcker med konstant  $\Omega_z$ , dvs konstant yaw-rate.

## ESP: Krav på kunskap om bilens uppförande

Villkoret på sidrörelse som kan formuleras i  $V_y$  men det normala är att införa fordonets sidavdrift  $\beta$

Definiera fordonets sidavdrift (body slip på engelska)

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$$

Vi får ett andra villkor på reglerfunktionen:

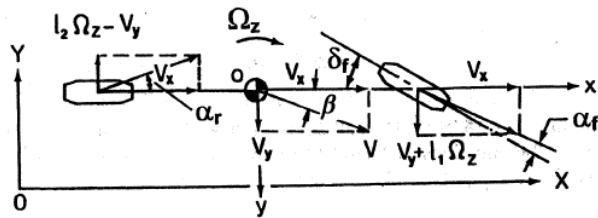
Reglera  $\beta$

Detta är bakgrunden till att den ursprungligen vanliga termen AYC - Active Yaw(-rate) Control inte är lika populär längre.

# ESP: Krav på kunskap om bilens uppförande

Slutsatsen att det krävs två variabler att reglera på.

Vi väljer  $\Omega_z$  och  $\beta$ .



# ESP: Önskvärt beteende

Regleruppgiften består alltså i att reglera  $\Omega_z$  och  $\beta$ .

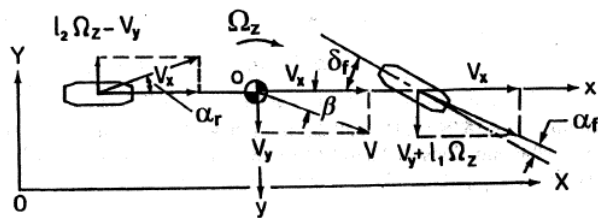
Vilka börvärden ska man använda?

Här kommer föraren in i bilden och vad vet vi om personen bakom ratten? Det vi vet är som vanligt förarens agerande på sina reglage: ratt, pedaler och växelspak. (De två senare är inte primära här men är viktiga för underliggande reglering som ABS/TC.)

Uppgift: relatera styrvinkel,  $\delta$ , till börvärden på  $\Omega_z$  och  $\beta$ .

# Önskat beteende: Girvinkelhastigheten

Hur ska vi relatera styrvinkel,  $\delta$ , till lämpliga börvärden på  $\Omega_z$  och  $\beta$  som beskriver ett gott uppförande hos fordonet. Utgår från värdena vid stationär kurvtagning.

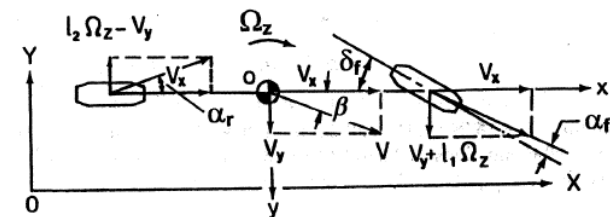


$$\delta_f = \frac{L}{R} + K_{us} \frac{V^2}{gR}, \quad \Omega_z = \frac{V}{R}$$

Eliminerar vi kurvradien  $R$  så får vi sambandet

$$\Omega_z^{nom} = \frac{V}{L + K_{us} V^2 / g} \delta_f$$

# Önskat beteende: Sidavdrift



$$\delta_f = \frac{L}{R} + K_{us} \frac{V^2}{gR}, \quad \beta^{nom} = \frac{l_2}{R} - \alpha_r = \frac{l_2}{R} - \frac{l_1 m V_x^2}{2 C_{\alpha r} L R}$$

$$\beta^{nom} = \frac{l_2 - \frac{l_1 m V_x^2}{2 C_{\alpha r} L}}{L + K_{us} V^2 / g} \delta_f$$

## ESP: Reglermål

Vi är nu redo att formulera reglermålen (i matematiska termer)

Reglera bilen så att den reagerar på rattutslag,  $\delta$ , så att girvinkelhastighet,  $\Omega_z$ , och sidavdrift,  $\beta$ , beter sig som under stabil stationär kurvtagning.

Välj som referensvärden

$$\Omega_z^{nom} = \frac{V_x}{L + K_{us} V_x^2 / g} \delta_f$$

och

$$\beta^{nom} = \frac{l_2 - \frac{l_1 m V_x^2}{2 C_{\alpha_f} L}}{L + K_{us} V_x^2 / g} \delta_f$$

## ESP: Övergripande funktion

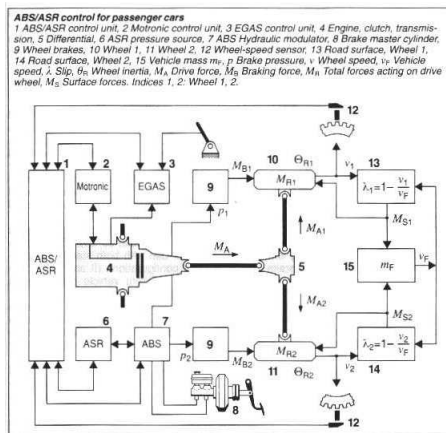
Vi har nu kommit en bit på väg.

För att uppnå önskad funktion behöver man

- Beskriva bilens önskade beteende. Detta är inte trivialt eftersom det kräver en uppfattning om förarens önskan.
- Beskriva bilens aktuella beteende.
- Relatera till de sensorer och aktuatorer som finns, och till underliggande reglerystem.
- Ta hänsyn till förarens beteende i en pressad situation.
- Utforma ett styrsystem baserat på ovanstående.

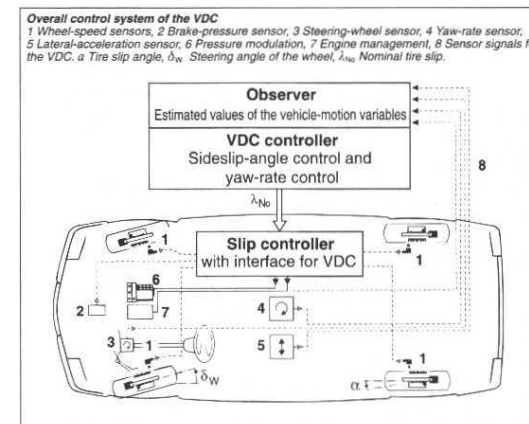
Vi ska nu översiktligt titta på den tredje punkten.

## ESP: Underliggande reglerystem



Kombinerad arkitektur för ABS och Traktion Control (ASR på tyska).

## ESP: Ett exempel



Ett exempel på arkitektur.

Följande sensorsignaler finns tillgängliga.

$\delta$  Styrvinkel [rad].

$\dot{\psi}$  Girhastighet [rad/s].

$\omega_{1,2,3,4}$  Rotationshastigheter för respektive hjul [rad/s].

$a_{lat}$  Lateral acceleration [m/s<sup>2</sup>].

Det finns också sensorer i det hydrauliska bromssystemet men vi går inte in i sådan detalj.

Uppgift: Bestäm aktuellt  $\Omega_z$ ,  $V_x$  och  $\beta$ .

Enklaste ansatsen kan förbättras.

Inte ens  $V_x$  är enkel, dvs inte ens en "vanlig" hastighetsmätare är enkel.

Vi vet att dynamiken i ett förenklat fall ges av

$$\dot{\mathbf{u}} + M^{-1}A\mathbf{u} = M^{-1}B\delta$$

Det är naturligt att förbättra estimeringen av  $\Omega_z$ ,  $V_x$  och  $\beta$  genom att använda en **observatör**.

Uppgift: Bestäm aktuellt  $\Omega_z$ ,  $V_x$  och  $\beta$ .

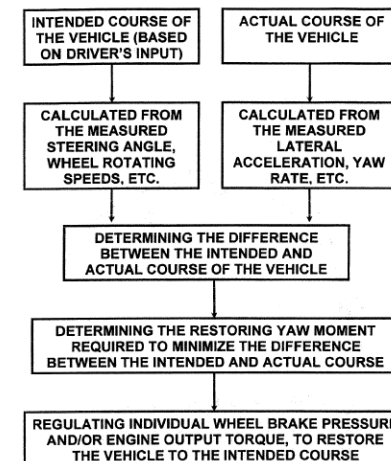
Enklaste ansatsen (tillräcklig i laborationen) är att

$\Omega_z$  bestäms direkt ur sensorn för  $\dot{\psi}$ , girhastigheten [rad/s].

$V_x$  bestäms ur  $\omega_{1,2,3,4}$  rotationshastigheterna för respektive hjul [rad/s]. Välj rätt hjul.

$\beta$  bestäms genom att integrera  $a_{lat}$  laterala accelerationen [m/s<sup>2</sup>]. Då får man  $V_y$  och med användning av  $V_x$  ovan erhåller man via definitionsformeln  $\beta$

Figur 5.22



Inför  $\Delta M$ , korrigerande moment kring bilens masscentrum som mellanstyrvariabel.

Antag att vi har nödvändiga variabler såsom  $(\delta, v_x, v_y, \dot{\Psi})$  från sensorer och observatörer.

Det gäller alltså att finna en styrlag

$$\Delta M = \Delta M(\delta, v_x, v_y, \dot{\Psi})$$

Välj  $\Delta M$  så att reglerna uppnås.

Det är då naturligt att använda

$$\Delta M = \Delta M(\beta^{nom} - \beta, \Omega_z^{nom} - \Omega_z)$$

Uppgiften är nu att givet ett önskat moment på bilen,  $\Delta M$ , skapa detta moment genom att individuellt bromsa olika hjul.

För att realisera detta kan komplicerade strategier användas, men vi begränsar oss nu till en enkel variant som är tillräcklig för laborationen i kursen.

Viktig strategifråga:

Vilket (vilka) hjul ska bromsas i olika situationer?

Enklaste ansatsen är att proportionellt återkoppla de två storheter man vill hålla nere

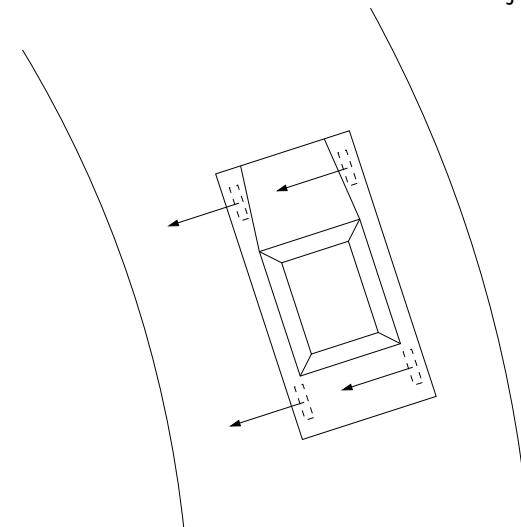
$$\Delta M = k_1(\beta^{nom} - \beta) + k_2(\Omega_z^{nom} - \Omega_z)$$

där  $k_1, k_2$  är regulatorparametrar som trimmas empiriskt.

Notera att  $k_1 = 0$  ger ren "yaw-rate control" med möjlig problembild enligt figur 5.23 i Wong.

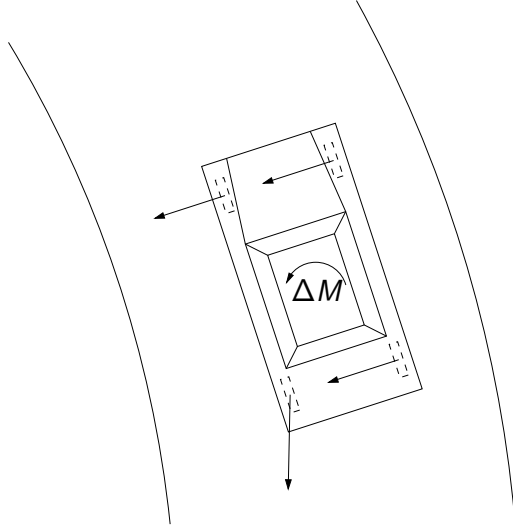
Fundera på vilka tecken  $k_1, k_2$  ska ha.

Schematisk skiss av situationen för diskussion av vilket hjul att bromsa.



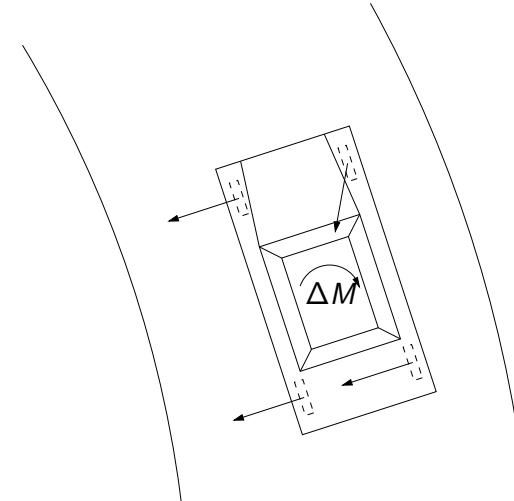
## ESP: Val av hjul att bromsa

Med  $\Delta M$  som i figur ska uppenbart ett vänsterhjul bromsas.  
Fram eller bak? Sidkraftsanalys ger att det är bak som ska bromsas.



## ESP: Val av hjul att bromsa

Med  $\Delta M$  som i figur ska uppenbart ett högerhjul bromsas.  
Med bromsat framhjul ger den minskade sidkraften ett moment i önskad riktning.



## ESP: Effektivering med bromsar

Uppgiften är alltså att givet ett önskat moment på bilen,  $\Delta M$ , skapa detta moment genom att individuellt bromsa olika hjul.

Strategi:

Vid överstyrning, när ett upprätande moment krävs, bromsas ett framhjul.

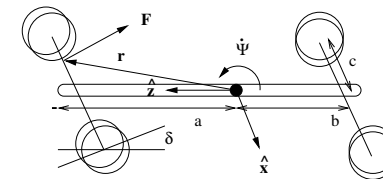
Vid understyrning, när ett vridande moment krävs, bromsas ett bakhjul.

Kvantitativt gäller det att finna den erforderliga bromskraften,  $F$ , som funktion av det önskade momentet  $\Delta M$  och styrvinkel  $\delta$ .

Löses fall för fall för de fyra fallen: höger- och vänstersväng, med respektive över- och understyrning.

## ESP: Effektivering med bromsar, Fall 1

Ett fordon i vänstersväng,  $\Omega_z < 0$ .



Antag att fordonet överstyr vilket medför  $\Delta M > 0$ . Styrvinkeln,  $\delta$ , är i figuren negativ.

Ett upprätande moment krävs. Det realiseras genom att bromsa höger framhjul.

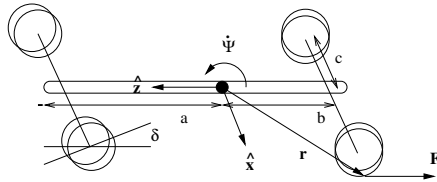
$$r = a\hat{x} + c\hat{y}$$

$$F = |F|(-\cos(-\delta)\hat{x} + \sin(-\delta)\hat{y}) = -|F|(\cos\delta\hat{x} + \sin\delta\hat{y})$$

$$M = r \times F = |F|(-a\sin\delta + c\cos\delta)\hat{z}$$

## ESP: Effektivering med bromsar, Fall 2

Ett fordon i vänstersväng,  $\Omega_z < 0$ .



Antag att fordonet understyr vilket medför  $\Delta M < 0$ . Styrvinkeln,  $\delta$ , är i figuren negativ.

Ett vridande moment krävs. Det realiseras genom att bromsa vänster bakhjul.

$$r = -b\hat{x} - c\hat{y}$$

$$F = -|F|\hat{x}$$

$$M = r \times F = -|F|c\hat{z}$$

## ESP: Effektivering med bromsar

I samtliga fall löses den erforderliga bromskraften,  $F$ , ut ur sista ekvationen som funktion av det önskade momentet  $\Delta M$  och styrvinkel  $\delta$ .

Vid en verklig realisering tillkommer att hantera det underliggande bromssystemet så att man erhåller de bromskrafter man önskar men vi går inte in på detta.

## ESP: Effektivering med bromsar, Fall 3 och 4

De två återstående fallen gäller fordon i högersväng,  $\Omega_z > 0$ , och är analoga med vänstersväng.

Notera dock olika teckenbyten.

Antag att fordonet överstyr. Ett upprätande moment realiseras genom att bromsa vänster framhjul, och momentet som krävs är mindre än noll.

Antag att fordonet understyr. Ett vridande moment realiseras genom att bromsa höger bakhjul, och momentet som krävs är större än noll.

## ESP: Problem kring förarbete

Det visar sig att många förare överreagerar i utsatta situationer.

Vid sladd yttrar det sig i alltför häftiga rattutslag.

Problemställning: Finns det några vettiga åtgärder som kan införlivas i styrsystemet?



Häftiga rattutslag resulterar via

$$\Omega_z^{nom} = \frac{V_x}{L + K_{us} V_x^2/g} \delta$$

och

$$\beta^{nom} = \frac{l_2 - \frac{l_1 m V_x^2}{2 C_{\alpha_r} L}}{L + K_{us} V_x^2/g} \delta_f$$

i för stora nominella värden.

Hur kan man begränsa  $\Omega_z^{nom}$  och  $\beta^{nom}$ ?

Det är inte lönt att kräva större sidkrafter än underlaget medger i förhållande till farten.

Vi har

$$F_{y_{max}} = m a_{y_{max}} < \mu m g$$

Nu vet vi inte  $\mu$  men kan skaffa oss en uppfattning via  $a_{y_{trigg}} = \mu g$  när det börjar sladda.

Vi har också

$$a_y = \dot{V}_y + V_x \Omega_z$$

Ansätter vi lite grovt att  $\dot{V}_y = 0$  precis i starten av sladden så får vi

$$\Omega_z^{nom} < \frac{\mu g}{V_x}$$

Inför denna begränsning i styrsystemet.

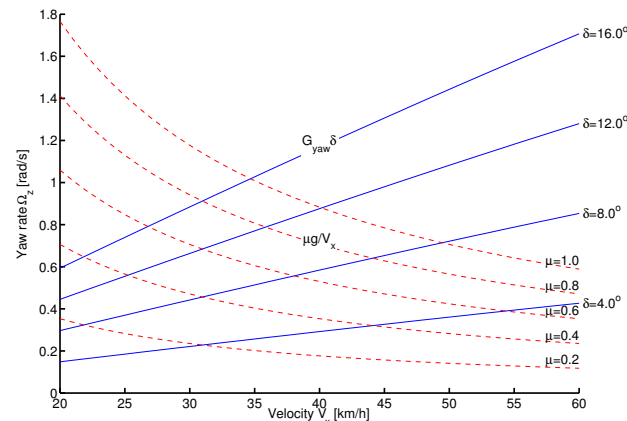


Illustration av begränsning  $\Omega_z^{nom}$  av

Vi får

$$\Omega_z^{nom} = \frac{V_x}{L + K_{us} V_x^2/g} \delta \quad \text{om} \quad \Omega_z^{nom} < \left| \frac{\mu g}{V_x} \right|$$

$$\Omega_z^{nom} = \left| \frac{\mu g}{V_x} \right| \text{sign}(\Omega_z^{nom}) \quad \text{annars}$$

Notera att detektering/diagnos krävs utöver filtrering (observatör) för att identifiera att sladd sker.

Ansatsen  $\dot{V}_y = 0$  i starten av sladden är grov så om man säger att den termen tar maximalt 15 % av  $a_y$  så kan man använda

$$\Omega_z^{nom} < \left| 0.85 \frac{\mu g}{V_x} \right|$$

Begränsning av  $\beta_{nom}$ ?

Illustrerar med en empirisk gräns

$$\beta_{max}^{nom} = \text{atan}(0.02\mu g)$$

En bakgrund till att den fungerar är att  $\beta$  är liten när man har kontroll på fordonet. (I laborationen kan man använda  $\beta^{nom} = 0$  med gott resultat.)

Man får alltså

$$\beta^{nom} = \frac{l_2 - \frac{l_1 m V_x^2}{2C_{\alpha_f} L}}{L + K_{us} V^2 / g} \delta_f \quad \text{om } |\beta^{nom}| < \text{atan}(0.02\mu g)$$

$$\beta^{nom} = |\text{atan}(0.02\mu g)| \text{sign}(\beta^{nom}) \quad \text{annars}$$

där man skattar  $\mu g$  på som innan.

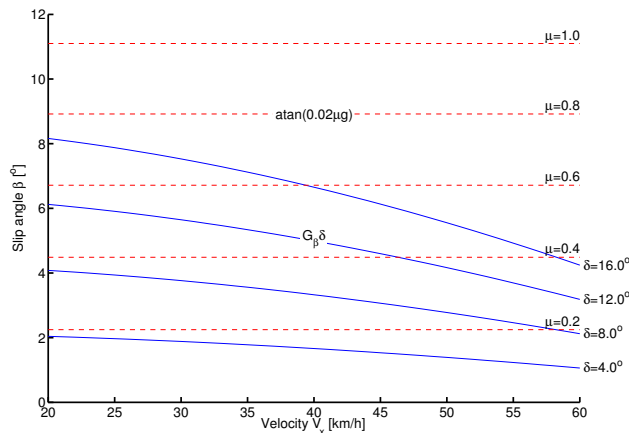


Illustration av begränsning av  $\beta^{nom}$ . För  $\mu = 0.95$  (asfalt) får man 10 grader som övre gräns, och för  $\mu = 0.35$  (packad snö) får man 4 grader som övre gräns.

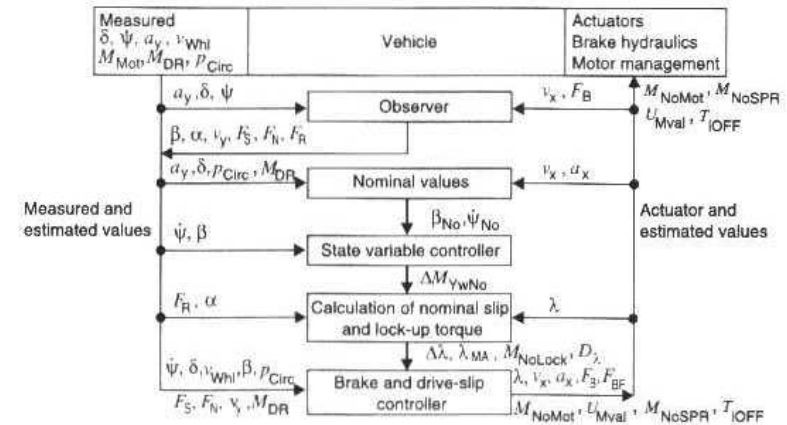
Man kan gå vidare och införa filtrering/fördröjningar innan man låter rattutslag slå igenom i börvärdena.

Man har också en dödzon på  $\Delta M$ , dvs den måste vara större än en tröskel för att påverka bromsning av hjul. Det ska alltså inte hända något under normal körning. Detta sparar också bränsle eftersom något hjul i annat fall skulle småbromsa hela tiden.

Vi har nu kommit igenom hela kedjan.

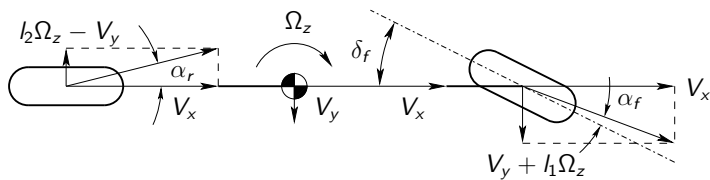
För att uppnå önskad funktion behöver man

- Beskriva bilens önskade beteende. Detta är inte trivialt eftersom det kräver en uppfattning om förarens önskan.
- Beskriva bilens aktuella beteende.
- Relatera till de sensorer och aktuatorer som finns, och till underliggande regelsystem.
- Ta hänsyn till förarens beteende i en pressad situation.
- Utforma ett styrsystem baserat på ovanstående.



4WS

From the previous lecture:



Kinematics from the figure

Model for tire forces

$$\alpha_f = \delta_f - \frac{l_1 \Omega_z + V_y}{V_x}$$

$$\alpha_r = \frac{l_2 \Omega_z - V_y}{V_x}$$

$$F_{yf} = 2C_{\alpha f} \alpha_f$$

$$F_{yr} = 2C_{\alpha r} \alpha_r$$

From now it will be assumed that the longitudinal velocity  $V_x$  is constant and it will be play the role of a parameter in the analysis.

4WS

From the previous lecture:

$$m(\dot{V}_y + V_x \Omega_z) = F_{yr} + F_{yf} \cos \delta_f + F_{xf} \sin \delta_f$$

$$I_z \dot{\Omega}_z = l_1 F_{yf} \cos \delta_f - l_2 F_{yr} + l_1 F_{xf} \sin \delta_f$$

$$F_{yf} = 2C_{\alpha f} \left( \delta_f - \frac{l_1 \Omega_z + V_y}{V_x} \right), \quad F_{yr} = 2C_{\alpha r} \left( \frac{l_2 \Omega_z - V_y}{V_x} \right)$$

Can be rearranged

$$m \dot{V}_y + \underbrace{\left[ \frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_1} V_y + \underbrace{\left[ mV_x + \frac{2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_2} \Omega_z = 2C_{\alpha f} \delta_f(t)$$

$$I_z \dot{\Omega}_z + \underbrace{\left[ \frac{2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_3} V_y + \underbrace{\left[ \frac{2l_1^2 C_{\alpha f} + 2l_2^2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_4} \Omega_z = 2l_1 C_{\alpha f} \delta_f(t)$$

The system

$$m\dot{V}_y + \underbrace{\left[ \frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_1} V_y + \underbrace{\left[ mV_x + \frac{2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_2} \Omega_z = 2C_{\alpha f} \delta_f(t)$$

$$I_z \dot{\Omega}_z + \underbrace{\left[ \frac{2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_3} V_y + \underbrace{\left[ \frac{2l_1^2 C_{\alpha f} + 2l_2^2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_4} \Omega_z = 2l_1 C_{\alpha f} \delta_f(t)$$

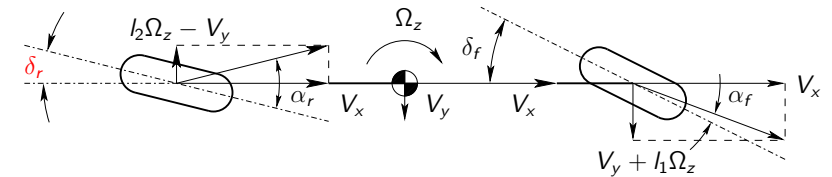
can be written in matrix form

$$M\dot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = \mathbf{u}(t)$$

where

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2C_{\alpha f} \delta_f(t) \\ 2l_1 C_{\alpha f} \delta_f(t) \end{bmatrix}$$

Now we modify the model and add rear-wheel steering with the steer angle  $\delta_r$ :



Kinematics from the figure

$$\alpha_f = \delta_f - \frac{l_1 \Omega_z + V_y}{V_x}$$

$$\alpha_r = \frac{l_2 \Omega_z - V_y}{V_x} + \delta_r$$

Now we get

$$m(\dot{V}_y + V_x \Omega_z) = F_{yr} + F_{yf} \cos \delta_f + F_{xf} \sin \delta_f$$

$$I_z \dot{\Omega}_z = l_1 F_{yf} \cos \delta_f - l_2 F_{yr} + l_1 F_{xf} \sin \delta_f$$

$$F_{yf} = 2C_{\alpha f} \left( \delta_f - \frac{l_1 \Omega_z + V_y}{V_x} \right), \quad F_{yr} = 2C_{\alpha r} \left( \frac{l_2 \Omega_z - V_y}{V_x} + \delta_r \right)$$

Can be rearranged

$$m\dot{V}_y + a_1 V_y + a_2 \Omega_z = 2C_{\alpha f} \delta_f + 2C_{\alpha r} \delta_r$$

$$I_z \dot{\Omega}_z + a_3 V_y + a_4 \Omega_z = 2l_1 C_{\alpha f} \delta_f(t) - 2l_2 C_{\alpha r} \delta_r$$

The system

$$M\dot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = \mathbf{u}_f \delta_f(t) + \mathbf{u}_r \delta_r(t)$$

where

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_f = \begin{bmatrix} 2C_{\alpha f} \\ 2l_1 C_{\alpha f} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} 2C_{\alpha r} \\ -2l_2 C_{\alpha r} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} V_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$$

By taking the Laplace transform we get

$$(sM + A)\mathbf{X} = \mathbf{u}_f \delta_f(s) + \mathbf{u}_r \delta_r(s)$$

It follows from

$$(sM + A)X = \mathbf{u}_f \delta_f(s) + \mathbf{u}_r \delta_r(s)$$

that

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ms + a_1 & a_2 \\ a_3 & l_z s + a_4 \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 2C_{\alpha f} \\ 2l_1 C_{\alpha f} \end{bmatrix} \delta_f + \begin{bmatrix} 2C_{\alpha r} \\ -2l_2 C_{\alpha r} \end{bmatrix} \delta_r \right) \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} l_z s + a_4 & -a_2 \\ -a_3 & ms + a_1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 2C_{\alpha f} \\ 2l_1 C_{\alpha f} \end{bmatrix} \delta_f + \begin{bmatrix} 2C_{\alpha r} \\ -2l_2 C_{\alpha r} \end{bmatrix} \delta_r \right) \end{aligned}$$

where

$$\Delta = l_z m s^2 + (l_z a_1 + m a_4) s + (a_1 a_4 - a_2 a_3)$$

is the determinant.

The transfer functions from  $\delta_r$  to  $V_y$  and  $\Omega_z$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_y(s) \\ \Omega_z(s) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} l_z s + a_4 & -a_2 \\ -a_3 & ms + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2C_{\alpha r} \\ -2l_1 C_{\alpha r} \end{bmatrix} \delta_r(s) \\ &= \frac{2C_{\alpha r}}{\Delta} \begin{bmatrix} l_z s + a_4 + l_1 a_2 \\ -a_3 - l_1 m s - a_1 l_1 \end{bmatrix} \delta_r(s) = \begin{bmatrix} G_{yr}(s) \\ G_{zr}(s) \end{bmatrix} \delta_r(s) \end{aligned}$$

Consider a step in the rear steer angle, i.e.,  $\delta_r(s) = 1/s$ . The limit value, as  $t$  tends to infinity, of the lateral acceleration at the center of gravity is then

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}_y + V_x \Omega_z &= \lim_{s \rightarrow 0} s(sV_y + V_x \Omega_z) = \lim_{s \rightarrow 0} s(sG_{yr} + V_x G_{zr}) \delta_r \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(\dots)s^2 + (\dots)s - 2V_x C_{\alpha r} (a_1 l_1 + a_3)}{(\dots)s^2 + (\dots)s + (a_1 a_4 - a_2 a_3)} \frac{1}{s} = -\frac{2V_x C_{\alpha r} (a_1 l_1 + a_3)}{a_1 a_4 - a_2 a_3} \end{aligned}$$

where we used the final value theorem  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ .

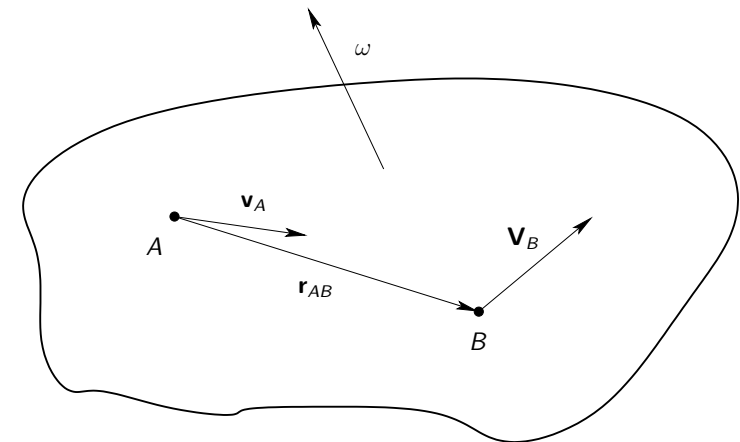
The transfer functions from  $\delta_r$  to  $V_y$  and  $\Omega_z$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_y(s) \\ \Omega_z(s) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} l_z s + a_4 & -a_2 \\ -a_3 & ms + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2C_{\alpha r} \\ -2l_1 C_{\alpha r} \end{bmatrix} \delta_r(s) \\ &= \frac{2C_{\alpha r}}{\Delta} \begin{bmatrix} l_z s + a_4 + l_1 a_2 \\ -a_3 - l_1 m s - a_1 l_1 \end{bmatrix} \delta_r(s) = \begin{bmatrix} G_{yr}(s) \\ G_{zr}(s) \end{bmatrix} \delta_r(s) \end{aligned}$$

Consider a step in the rear steer angle, i.e.,  $\delta_r(s) = 1/s$ . The immediate response in the lateral acceleration at the center of gravity is then

$$\begin{aligned} \dot{V}_y + V_x \Omega_z \Big|_{t=0^+} &= \lim_{s \rightarrow \infty} s(sV_y + V_x \Omega_z) = \lim_{s \rightarrow \infty} s(sG_{yr} + V_x G_{zr}) \delta_r \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{2C_{\alpha r} l_z s^2 + (\dots)s + (\dots)}{l_z m s^2 + (\dots)s + (\dots)} \frac{1}{s} = \frac{2C_{\alpha r}}{m} \end{aligned}$$

where we used the initial value theorem  $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ .



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB})$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{V}_y \\ \dot{\Omega}_z \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} l_z s + a_4 & -a_2 \\ -a_3 & ms + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2C_{\alpha f} \\ 2l_1 C_{\alpha f} \end{bmatrix} \delta_f \\ &= \frac{2C_{\alpha f}}{\Delta} \begin{bmatrix} l_z s + a_4 - l_1 a_2 \\ -a_3 + l_1 ms + a_1 l_1 \end{bmatrix} \delta_f \end{aligned}$$

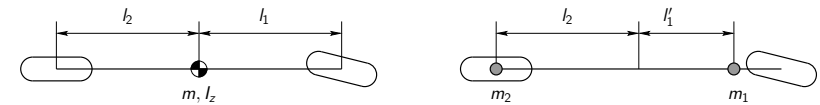
Consider a step in the front steer angle, i.e.,  $\delta_f(s) = 1/s$ . The immediate response in the lateral acceleration at the rear axle is then

$$\begin{aligned} \dot{V}_y + V_x \Omega_z - l_2 \dot{\Omega}_z \Big|_{t=0^+} &= \lim_{s \rightarrow \infty} s(sV_y - l_2 s \Omega_z + V_x \Omega_z) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2C_{\alpha f}(l_z - ml_1 l_2)s^2 + (\dots)s + (\dots)}{l_z ms^2 + (\dots)s + (\dots)} = \frac{2C_{\alpha f}(l_z - ml_1 l_2)}{l_z m} \end{aligned}$$

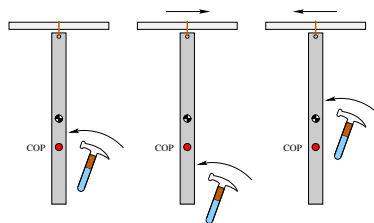
where we used the initial value theorem  $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ .

$$\dot{V}_y - l_2 \dot{\Omega}_z + V_x \Omega_z \Big|_{t=0^+} = \frac{2C_{\alpha f}(l_z - ml_1 l_2)}{l_z m} = \frac{2C_{\alpha f} m l_2 (l'_1 - l_1)}{l_z m}$$

where we have introduced the length  $l'_1 = l_z/(ml_2)$ . The system is equivalent to a system with a point mass  $m_1 = ml_2/(l'_1 + l_2)$  located at the distance  $l'_1$  in front of the center of gravity, and a point mass  $m_2 = ml'_1/(l'_1 + l_2)$  located at the rear axle.

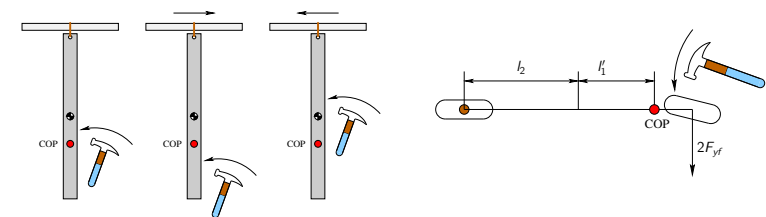


Consider a hanging beam being hit by a hammer:



Depending on where you hit it, the top of the beam will move in different directions. The limit case when the top doesn't move at all is when you hit it at the center of percussion (COP) in the figure). For a uniform beam the distance to (COP) from the top is 2/3 of the length of the beam.

If the suspension point is the rear axle, then the center of percussion is located at the mass  $m_1$  in the figure:



This explains the sign of the initial acceleration at the rear axle:

$$\dot{V}_y - l_2 \dot{\Omega}_z + V_x \Omega_z \Big|_{t=0^+} = \frac{2C_{\alpha f}(l_z - ml_1 l_2)}{l_z m} = \frac{2C_{\alpha f} m l_2 (l'_1 - l_1)}{l_z m}$$