TSFS06 Diagnos och övervakning
Föreläsning 7 - Olinjär residualgenerering

Erik Frisk

Institutionen för systemteknik
Linköpings universitet
erik.frisk@liu.se

2020-04-24

Översikt

- Introduktionsexempel
- Olinjära observatörer
  - Olinjära observatörer
  - Olinjära observatörer för diagnos
  - Huvudproblematik och två viktiga specialfall
- Olinjära konsistensrelationer
- Observatörer vs. konsistensrelationer
- Två avslutande designexempel

Konsistensrelationer vs. observatörer

Betrakta den lilla modellen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + bu\\ y &= cx\end{aligned}$$

Design av residualgenerator via konsistensrelation

$$\dot{y} - ay - cbu = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{p+\alpha}[(p-a) \quad -cb]\begin{pmatrix}y\\u\end{pmatrix}$$

med tillståndsvariabel $w = r - y$ så får man tillståndsbeskrivningen

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -\alpha w - (a+\alpha)y - cbu\\ r &= y + w\end{aligned}$$

Obeservatör

En konsistensrelation för systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + bu\\ y &= cx\end{aligned}$$

togs fram genom att *eliminera* den obekanta variabeln x. En annan ansats är att skatta x och använda det värdet.

Observatörer kallas filter som skattar obekanta tillståndsvariabler i dynamiska system. Ett enkelt linjärt fall

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx\end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

I observatören *återkopplas* $y - \hat{y} = y - C\hat{x}$, matrisen K är observatörsförstärkningen.

Konsistensrelationer vs. observatörer

Betrakta igen den lilla modellen

$$\dot{x} = ax + bu$$
$$y = cx$$

Design av residualgenerator via observatör

En motsvarande design via observatörsmetodik blir då

$$\dot{\hat{x}} = a\hat{x} + bu + K(y - c\hat{x})$$
$$r = y - c\hat{x}$$

där K är vald så att $a - Kc$ ligger i vänster halvplan, dvs. $a - Kc < 0$.

Ekvivalensresultat för linjära modeller

$$\dot{w} = -\alpha w - (a+\alpha)y - cbu \qquad \dot{\hat{x}} = a\hat{x} + bu + K(y - c\hat{x})$$
$$r = w + y \qquad r = y - c\hat{x}$$

Välj K så att $a - Kc = -\alpha$, då blir observatörslösningen

$$\dot{\hat{x}} = -\alpha\hat{x} + bu + \frac{1}{c}(a+\alpha)y$$
$$r = y - c\hat{x}$$

Byt nu tillståndsvariabel till $w = -c\hat{x}$ så fås

$$\dot{w} = -\alpha w - (a+\alpha)y - cbu$$
$$r = y + w$$

Detta gäller även generellt för linjära system; alla residualgeneratorer som kan konstrueras via konsistensrelationer kan konstrueras via observatörsmetodik och vice versa.

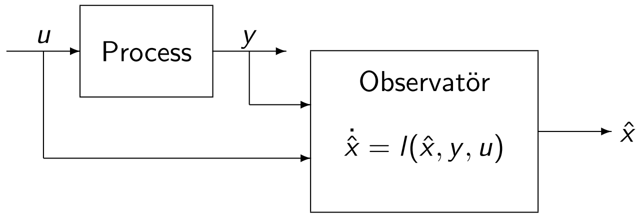
Översikt

- *Introduktionsexempel*
- *Olinjära observatörer*
  - *Olinjära observatörer*
  - *Olinjära observatörer för diagnos*
  - *Huvudproblematik och två viktiga specialfall*
- *Olinjära konsistensrelationer*
- *Observatörer vs. konsistensrelationer*
- *Två avslutande designexempel*

(Tillstånds-) observatörer

En observatör är ett filter som skattar interna tillstånd i en tillståndsbeskrivning med hjälp av observerade variabler.

$$\dot{x} = f(x,u)$$
$$y = h(x,u)$$



där vektorfältet $l(\hat{x}, y, u)$ väljs så att $\hat{x} \to x$.

En enkel observatörsansats är:

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{f(\hat{x},u) + K(y - h(\hat{x},u))}_{l(\hat{x},y,u)}$$

Observatör för linjärt system

För en linjär modell

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

kan en observatör tecknas

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

Vi vill att $\hat{x} \to x$. Teckna $e = x - \hat{x}$, då gäller

$$\dot{e} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - K(Cx - C\hat{x}) = (A - KC)e$$

Om $A - KC$ har egenvärden i vänster halvplan så kommer $e \to 0$.
Detta är möjligt om modellen är observerbar.

Observatörer

Sätt att välja observatörsförstärkningen K i

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + K(y - h(\hat{x}, u))$$

görs ("ad-hoc"-mässigt) till exempel genom:

- linjärisering och polplacering eller Kalman-filter design linjärisering runt en arbetspunkt.
- Extended Kalman Filter, Unscented Kalman Filter (UKF), partikelfilter, ...
- sliding mode
- high-gain
- gain scheduling - parameterstyrning
- hur många till som helst ...

Extended Kalman Filter

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= g(x_t, w_t), & \text{cov } w_t &= Q_t \\ y_t &= h(x_t) + e_t, & \text{cov } e_t &= R_t \end{aligned}$$

Mätuppdatering

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t} &= \hat{x}_{t|t-1} + K_t(y_t - h(\hat{x}_{t|t-1})) \\ K_t &= P_{t|t-1}H_t^T(H_tP_{t|t-1}H_t^T + R_t)^{-1} \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - K_tH_tP_{t|t-1} \end{aligned} \qquad H_t = \frac{\partial}{\partial x}h(x)|_{x=\hat{x}_{t|t-1}}$$

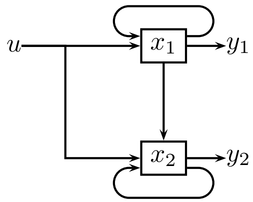
Tidsuppdatering

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1|t} &= g(\hat{x}_{t|t}, 0) \\ P_{t+1|t} &= F_tP_{t|t}F_t^T + G_tQ_tG_t^T \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F_t &= \frac{\partial}{\partial x}g(x, w)|_{x=\hat{x}_{t|t}, w=0} \\ G_t &= \frac{\partial}{\partial w}g(x, w)|_{x=\hat{x}_{t|t}, w=0} \end{aligned}$$

Observerbarhet - finns informationen i mätningarna?

- Lite slarvigt: Är det möjligt att konstruera en observatör? $\Leftrightarrow$ syns information om alla tillstånd i observationerna? $\Leftrightarrow$ går det att få $\hat{x} \to x$ $\Leftrightarrow$ är systemet observerbart?
- Eftersom vi vid avkoppling av tex. sensorfel, "tar bort" mätekvationer så kan man råka ut för att systemet blir icke observerbart även om det var så från början.
- Olinjär observerbarhet är teoretiskt lite bökigt, men inte sällan kan man se viktiga saker rätt enkelt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) \\ y_1 &= h_1(x_1, u) \\ y_2 &= h_2(x_2, u) \end{aligned}$$



Tillståndet x är observerbart från y_2 men inte från y_1.

Linjära system, observerbarhet

För ett linjärt system,

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx$$

derivera mätsignalen $n-1$ gånger

$$Y = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x(t) = \mathcal{O}x(t)$$

Observerbarhet är då lika med om vi kan lösa ekvationssystemet

$$Y = \mathcal{O}x(t)$$

vilket gick om matrisen $\mathcal{O}$ hade full kolumnrang.

Behändig notation: Lie-derivata

För ett olinjärt system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

så gäller att

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = L_f h(x)$$

där $L_f h(x)$ kallas Lie-derivatan av $h(x)$ längs $f(x)$. Med en utökad notation för repeterade deriveringar

$$L_f^k h(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(L_f^{k-1} h(x)\right) f(x), \quad L_f^0 h(x) = h(x)$$

så har man ett enkelt skrivsätt för

$$y^{(k)} = L_f^k h(x)$$

Ett tillräckligt villkor för olinjär observerbarhet

Gör nu på samma sätt som för linjära system

$$Y = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(q)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^q h(x) \end{pmatrix} = F(x)$$

Enligt inversa funktionssatsen så är ett tillräckligt villkor för att x unikt ska bestämmas, i en omgivning av $x = x^0$ och $y^0 = F(x^0)$, att

$$\exists q. \ \text{rang} \ \frac{\partial}{\partial x} F(x)\Big|_{x=x^0} = n$$

Detta är ett enkelt algebraiskt villkor som kan testas (för ett givet q). Sammanfattningsvis:

Teorem (Observability rank condition)

Om ett system uppfyller rangvillkoret ovan i $x = x^0$ är systemet lokalt svagt observerbart i x^0.

Översikt

Observatörer för diagnos

Systemet som ska övervakas har inga signaler som ska avkopplas:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_u u + B_f f \\ y &= Cx \end{aligned}$$

En linjär observatör ges naturligt av:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B_u u + K(y - C\hat{x}) \\ r &= y - C\hat{x} \end{aligned}$$

Om $A - KC$ är stabil så kommer $r \to 0$ då $f = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A - KC)e + B_f f \\ r &= Ce \end{aligned}$$

Med överföringsfunktion från fel till residual

$$G_{rf}(s) = C(sI - A + KC)^{-1} B_f$$

Med avkoppling

Om man har signaler som ska avkopplas är det inte lika enkelt:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_u u + B_d d + B_f f \\ y &= Cx + D_d d + D_f f \end{aligned}$$

En liknande linjär observatör ges naturligt av:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B_u u + K(y - C\hat{x}) \\ r &= W(y - C\hat{x}) \end{aligned}$$

Två krav:

- $A - KC$ måste vara stabil (enkelt om systemet är observerbart)
- Överföringsfunktionen nedan ska vara 0 (inte enkelt)

$$G_{rd}(s) = \cdots = W\left(C(sI - (A - KC))^{-1}(B_d d - KD_d d) + D_d d\right)$$

En generell metodik

De flesta olinjära observatörsmetoder bygger på:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, f, d) \\ y &= h(x, u, f, d) \end{aligned}$$

och hitta en transformation $z = \Phi_1(x)$ och $\tilde{y} = \Phi_2(y)$ så att systemet transformeras till

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f_1(z_1, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, u, f) \\ \dot{z}_2 &= f_2(z_1, z_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, u, f, d) \\ \tilde{y}_1 &= h_1(z_1, u, f) \\ \tilde{y}_2 &= h_2(z, u, f) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= f_1(z_1, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, u, f) \\ \tilde{y}_1 &= h_1(z_1, u, f) \end{aligned}$$

dvs. man har extraherat ut en del av systemet som inte påverkas av signalen d. Återkoppla sedan $\tilde{y}_1$ för att generera residual.
Metodik för att hitta Φ_1 och Φ_2 oftast komplicerad.

Observatörer, forts.

- Observatörer är ett naturligt sätt att generera residualer när vi inte behöver göra avkoppling.
- Svårt när vi ska avkoppla. Avkoppling löst linjärt, men olinjärt är det svårare. En del resultat finns.
- Inga derivator av kända variabler dyker upp, vi får direkt en tillståndsrepresentation av residualgeneratorn.

Översikt

- Introduktionsexempel
- Olinjära observatörer
  - Olinjära observatörer
  - Olinjära observatörer för diagnos
  - Huvudproblematik och två viktiga specialfall
- Olinjära konsistensrelationer
- Observatörer vs. konsistensrelationer
- Två avslutande designexempel

Observatörer för diagnos: huvudproblematik

1. Stabilitet hos residualen (hur ser man till att $\hat{x} \to x$?)
2. avkoppling av signaler

Det första problemet finns mycket forskning och erfarenhet om, teoretiskt ofta svårt att visa konvergens, men i praktiken ofta möjligt med väl fungerande lösningar.

Den andra punkten är bökigare. Här tas upp två enkla (men vanliga) fall där avkoppling är rättframt.

- fel modellerade som konstanta fel
- fel i sensorer

Fel modellerade som konstanta parametrar

Antag modellen

$$\dot{x} = -\beta x + u$$
$$y = x$$

där β är en okänd och konstant parameter.
Vi vill konstruera en teststorhet med en observatör som avkopplar förändringar i β.

Fel modellerade som konstanta parametrar

Introducera en ny tillståndsvektor: $z = \binom{x}{\beta}$. Dynamiken för det nya tillståndet är $\dot{\beta} = 0$.

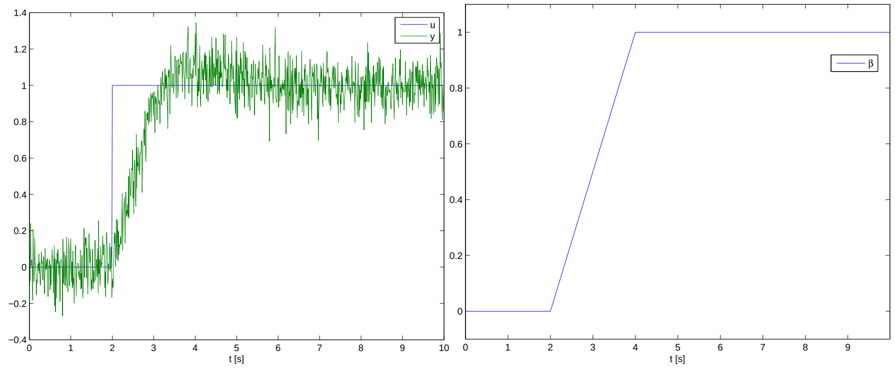
$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -z_2 z_1 + u \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$y = z_1$$

där $z_1 = x$ och $z_2 = \beta$. Antag att ett K sådant att

$$\dot{\hat{z}} = \begin{pmatrix} -\hat{z}_2 \hat{z}_1 + u \\ 0 \end{pmatrix} + K(t)(y - \hat{y})$$
$$\hat{y} = \hat{z}_1$$
$$r = y - \hat{y}$$

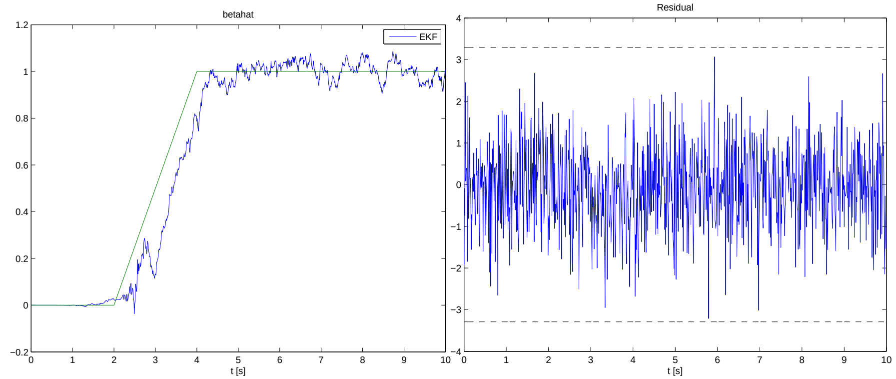
är stabilt.
Då kommer residualen r gå mot 0 oberoende av värdet på β.

EKF som residualgenerator



$$x_{t+1} = x_t - T_s\beta x_t + T_s u$$
$$y_t = x_t + f_t$$

EKF som residualgenerator



$$x_{t+1} = x_t - T_s\beta x_t + T_s u$$
$$y_t = x_t + f_t$$

Fel i sensorer

Exempel:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u)\\ y_1 &= h_1(x, u) + f_1\\ y_2 &= (1 - f_2)h_2(x, u)\\ y_3 &= h_3(x, u, f_3)\end{aligned}$$

Notera att f_i *bara* ingår i sensorekvationer.

För att avkoppla fel i sensor i, generera residualen genom att använda en observatör för att skatta $\hat{y}_j$ utan att använda sensor i.
Beräkna residualen som $r = y_j - \hat{y}_j$ där $i \neq j$.

Avkoppling av sensorfel vid observatörsbaserad design

Modell:

$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x, u) \\ h_2(x, u) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{bmatrix}$$

Sökt: Residual känslig för fel f_{s1} och okänslig för f_{s2}.

Strategi:

- Residualen skapas som $r_1 = y_1 - \hat{y}_1$ där
- $\hat{y}_1$ skattas utan att använda sensor 2 (y_2).

Lösning: Skattningen $\hat{y}_1$ kan göras via en olinjär observatör:

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + K_1(y_1 - h_1(\hat{x}, u))$$
$$r_1 = y_1 - \hat{y}_1 = y_1 - h_1(\hat{x}, u)$$

Olinjära observatörer för diagnos: styrkor och svagheter

+ Observatörsproblemet mycket välstuderat och välanvänt inom industrin.
(-) Även om det är välstuderat så finns ofta inga garantier för stabilitet. Trots allt ett ganska svårt problem.
+ Inget problem med realisering av residualgeneratorn, den fås direkt på tillståndsform.
- Avkoppling är svårt (blev bökigt även i ett linjärt fall).
+ Det fanns två vanligt förekommande fall där avkoppling var rättframt.

Översikt

Konsistensrelationer

En olinjär konsistensrelation en relation mellan observerbara signaler (och dess derivator) som är uppfylld i det felfria fallet.

$$z \in \mathcal{O} \Rightarrow g(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots) = 0$$

För att kunna använda g för att detektera fel så måste ett övervakat fel göra så att relationen bryts.

För linjära system var det "enkelt" att hitta alla konsistensrelationer.

Det olinjära problemet är inte lika enkelt och inga generella resultat finns som i det linjära fallet. Dock kan man komma en bra bit med sunt förnuft, handräkning och datorhjälpmedel.

Konsistensrelationer $\sim$ ARR (Analytical Redundancy Relation) $\sim$ parity relation $\sim \dots$

Olinjära konsistensrelationer

Att härleda konsistensrelationer kan ses som problemet att givet modellekvationerna, eliminera okända variabler.

Linjärt exempel:

$$\begin{aligned} y_1 &= 6x + u \\ y_2 &= 3x \end{aligned}$$

vilket ger att

$$y_1 - 2y_2 = 6x + u - 2 \cdot 3x = u$$

och alltså är

$$y_1 - 2y_2 - u = 0$$

en konsistensrelation.

Relationen hittades genom att med en "smart" transformation eliminera den okända variabeln x.

Olinjära konsistensrelationer

Samma angreppsätt kan användas i det olinjära dynamiska fallet.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1x_2 + du \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= -dx_1 \\
y_1 &= x_1 \\
y_2 &= x_2
\end{aligned}
$$

där d modellerar en signal vi önskar avkoppla (exempelvis ett fel).

Först, derivera båda mätekvationerna och eliminera tillståndsvariablerna x_i:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \dot{x}_1 = -x_1x_2 + du = -y_1y_2 + du \\
\dot{y}_2 &= \dot{x}_2 = x_3 \\
\ddot{y}_2 &= \dot{x}_3 = -dx_1 = -dy_1
\end{aligned}
$$

Olinjära konsistensrelationer

Vi har alltså bland annat:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 + y_1y_2 - du &= 0 \\
\ddot{y}_2 + dy_1 &= 0
\end{aligned}
$$

Eliminera d är nu enkelt genom att multiplicera ekvation 1 med y_1, ekvation 2 med u och addera dem. Detta ger konsistensrelationen:

$$y_1(\dot{y}_1 + y_1y_2 - du) + u(\ddot{y}_2 + dy_1) = y_1\dot{y}_1 + y_1^2y_2 + u\ddot{y}_2 = 0$$

där signalen d har försvunnit.

Alltså, relationen $y_1\dot{y}_1 + y_1^2y_2 + u\ddot{y}_2 = 0$ håller oavsett värdet på signalen d.

Konsistensrelation, beräkning av residual

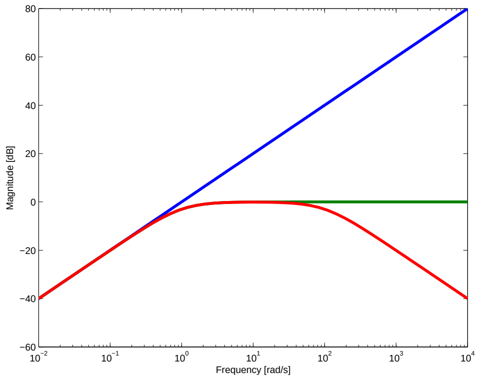
Om alla derivator av y och u vore kända:

$$r = y_1\dot{y}_1 + y_1^2y_2 + u\ddot{y}_2$$

Då de (normalt) inte är kända så tvingas vi approximera dem.

$$\dot{y}(t) \approx \frac{p}{1 + p/\omega_c}y(t)$$

Svårt för höga derivator i brusiga miljöer.



$$
\begin{aligned}
G_1(s) &= s \\
G_2(s) &= \frac{s}{1 + s/\omega_c} \\
G_3(s) &= \frac{s}{(1 + s/\omega_c)(1 + s/\omega_h)}
\end{aligned}
$$

Konsistensrelation, beräkning av residual

En mer robust metod bygger på tex. spline-interpolation,

1. Anpassa en analytisk funktion till mätdata, exempelvis genom

$$\min_{\theta}\ P\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(t_i;\theta))^2 + (1-P)\int_{t=t_{\min}}^{t=t_{\max}} \ddot{f}(t;\theta)^2dt$$

där θ är parametrarna i spline-funktionerna, y_i den uppmätta signalen, och $P > 0$ en designratt som viktar hur slät spline-funktionen ska vara.

2. Beräkna derivator genom att analytiskt derivering av spline-funktionen

Hur gjorde vi i det linjära fallet?

Vi lade till (LP-)dynamik och skrev sedan residualgeneratorn på tillståndsform. Tex för konsistensrelationen $y_1 + y_2 + \dot{y}_2 - u = 0$

$$\dot{r} + \beta r = y_1 + y_2 + \dot{y}_2 - u \Rightarrow r = \frac{1}{p+\beta}\begin{bmatrix}1 & p+1 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ u\end{pmatrix}$$

vilket kan skrivas som tillståndsformen

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -\beta w + y_1 + (1-\beta)y_2\\ r &= w + y_2\end{aligned}$$

Tyvärr fungerar detta endast i undantagsfall för olinjära system. Exempelvis kan man visa att

$$r + \alpha_1\dot{r} + \alpha_2\ddot{r} = \dot{y}_1^2 + y_1\dot{y}_1 y_2 + u\ddot{y}_2$$

ej kan skrivas på tillståndsform.

Perfekt realisering av olinjära konsistensrelationer

Egentligen är enda möjligheten att skriva om det till ett linjärt problem

$$0 = \dot{y}_1 y_2 + y_1\dot{y}_2 + u = \frac{d}{dt}(y_1 y_2) + u$$

ovanstående går väldigt sällan. Tex är det inte möjligt för

$$0 = \dot{y}_1 y_2 + 2y_1\dot{y}_2 + u$$

Men multiplicerar man konsistensrelationen med y_2 så

$$0 = y_2(\dot{y}_1 y_2 + 2y_1\dot{y}_2 + u) = \dot{y}_1 y_2^2 + 2y_1 y_2\dot{y}_2 + uy_2 = \frac{d}{dt}(y_1 y_2^2) + y_2 u$$

är vi tillbaka i ett linjärt fall.

Ej heller detta går i alla fall och kräver rätt avancerad teori. Principen är dock lätt och kan nyttjas ibland.

Härledning: En arbetsgång

1. Derivera modellekvationerna tillräckligt många gånger (endast för dynamiska modeller)
2. Gör kluriga förenklingar så att okända variabler och icke-övervakade fel elimineras, dvs. hitta
$$h(z, f) = 0$$
3. En konsistensrelation är då (om $f = 0$ är det felfria fallet):
$$h(z, 0) = 0$$
4. Lös realisationsproblemet.

Proceduren innehåller 3 öppna frågor.

1. Antal gånger vi måste derivera
2. Hur ska förenklingarna göras
3. Realiseringsproblemet

Tre öppna frågor

- Antal gånger vi måste derivera
  Linjärt räcker det med modellens ordning. Olinjärt så är detta en bra gissning.
- Hur ska förenklingarna göras
  Generellt svårt men handräkning och datorstöd kan ta en långt. Gäller speciellt vissa klasser av system.
- Använda relationen till att beräkna en residual
  Tex. skatta derivatorna och sätt in.

Finns differential-algebraisk teori och metodik som löser 1 och 2 i samma steg (exempelvis differentiella Gröbner-baser).

Klasser av olinjära system

Det finns klasser av olinjära system där det finns teori och datorhjälpmedel så att härledning av konsistensrelationer är (nästan) lika enkelt i det olinjära fallet som i det linjära.

Exempel på sådana klasser av system är bilinjära och polynomiska system.

Exempel på bilinjärt system:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_1} x_i H_{ij} x_j$$

Polynomiska system är ännu lite mer generella:

$$g_i(x, z) = 0, \qquad i = 1, \dots, m$$

där g_i är polynom i x, z samt deras derivator.

Datorhjälpmedel

Betrakta modellen och en konsistensrelation:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^2 + u\\ y &= x^3\end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{y}^3 + 27\dot{y}y^2u + 27y^4 - 27y^2u^3 = 0$$

I Mathematica kan denna konsistensrelation härledas med kommandona:

```
In[1]:= x'[t] := -x[t]^2+u[t];
        f = y[t]-x[t]^3;
        GroebnerBasis[{f,D[f,t]},{}, {x[t]}]

Out[2]= {27 u[t]^3 y[t]^2 -  27 y[t]^4 -
         27 u[t]y[t]^2y'[t]-y'[t]^3}
```

Notera: Det är **inte** meningen att ni ska lära er varken Mathematica eller teorin bakom Gröbner-baser. Slutsatsen här är att om ni stöter på polynomiska problem ska veta om att då är datoralgebraiska verktyg speciellt hjälpsamma.

Polynomiska system

Med polynom menas till exempel:

$$g(y, u) = y^3\dot{u}u - yu, \quad g(y, u) = \dot{y}^3 + 27\dot{y}y^2u + 27y^4 - 27y^2u^3$$

eller en tillståndsbeskrivning

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u)\\ y &= h(x, u)\end{aligned}$$

där f och h är polynomiska ekvationer.

För dessa typer av modellbeskrivningar finns teori (Gröbner-baser) och datorverktyg (Maple, Mathematica, ...) som kan eliminera obekanta (härleda konsistensrelationer).

Generell kommentar: Datoralgebraiska system är särskilt väl lämpade att hantera polynomiska uttryck.

Polynomiska system, fler än man kanske tror

Många system som ej är skrivna på polynomisk form kan skrivas om. Exempel:

$$\dot{y} + e^{-ay} - u = 0$$

kan skrivas om på polynomisk tillståndsform som:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -z + u\\ \dot{z} &= -az\dot{y} = -az(u - z)\end{aligned}$$

Detta görs via omskrivningen $z = e^{-ay}$ som är lösningen till den polynomiska differentialekvationen $\dot{z} + az\dot{y} = 0$.
Alla elementära funktioner (trigonometriska, exponentiella, logaritmer) kan skrivas om på det viset.

$$y = \sin u \quad \Rightarrow \quad \dot{y}^2 - \dot{u}^2(1 - y^2) = 0$$

Olinjära konsistensrelationer: styrkor och svagheter

+ Avkoppling av störningar görs på samma sätt som för linjära ekvationer
+ Datorverktyg finns som kan hjälpa
+ Oftast inga problem med instabila residualgeneratorer
- Svårt att använda konsistensrelationen till att beräkna residualer. Man tvingas uppskatta derivator vilket kan vara svårt.
- Även om det såg bra ut i det lilla Mathematica-exemplet så är det en mycket beräkningskrävande operation. För stora exempel så tar det väldigt lång tid, kräver väldigt mycket minne och genererar gigantiska uttryck.

Översikt

Konsistensrelationer vs observatörer

Sammanfattning styrkor och svagheter,

Konsistensrelationer

+ Avkoppling "enkelt"
+ Datorverktyg finns
+ Stabilitet hos residualgeneratorer
- Svårt att beräkna residualer, derivatauppskattning
- Mycket beräkningskrävande

Observatörer

+ Observatörsproblemet mycket välstuderat

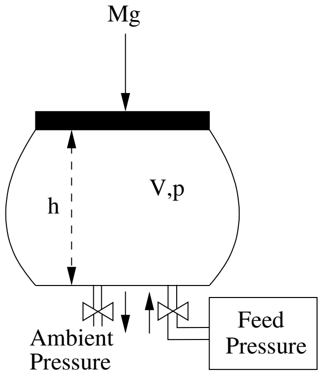
(-) Ofta inga garantier för stabilitet men ofta överkomligt problem

+ Inget problem med realisering av residualgeneratorn, den fås direkt på tillståndsform.
- Avkoppling är svårt
+ Det fanns två vanligt förekommande fall där avkoppling var rättframt.

Översikt

Exempelsystem

Principskiss och modell av en luftbälg för luftfjädring av lastbil.



$$M\ddot{h} = -Mg + F_b(p,h) - \mu\dot{h} + f_1 \quad (1)$$
$$pV(p,h) = mRT \quad (2)$$
$$\dot{m} = u_1 g_1(p) + u_2 g_2(p) + f_2 \quad (3)$$
$$y_1 = p + f_3 \quad (4)$$
$$y_2 = h + f_4 \quad (5)$$

f_1 - förändring av massan M

f_2 - fel på aktueringen

f_3 - fel på tryckgivaren

f_4 - fel på avståndsgivaren

Exempel 1: Isolera från fel f_1

För att isolera från fel f_1, använd ej ekvation (1).

$$M\ddot{h} = -Mg + F_b(p,h) - \mu\dot{h} + f_1 \quad (1)$$
$$pV(p,h) = mRT \quad (2)$$
$$\dot{m} = u_1 g_1(p) + u_2 g_2(p) + f_2 \quad (3)$$
$$y_1 = p + f_3 \quad (4)$$
$$y_2 = h + f_4 \quad (5)$$

Om en residual kan skapas med hjälp av ekvationerna 2-5 så har vi isolerat f_2, f_3, och f_4 från fel f_1.

Exempel 1: konsistensrelation eller observatör?

$$pV(p,h) = mRT \quad (2)$$
$$\dot{m} = u_1 g_1(p) + u_2 g_2(p) + f_2 \quad (3)$$
$$y_1 = p + f_3 \quad (4)$$
$$y_2 = h + f_4 \quad (5)$$

Konsistensrelation

- Ser eliminering svår ut? Nej, efter substitution av givare återstår bara två ekvationer.
- Hur ser dynamiken ut? Derivatan ingår linjärt i konsistensrelationen.
- Konsistensrelationsmetoden ser framkomlig ut.

Observatör

- Modellen är en DAE och måste därför skrivas om på tillståndsform.
- Eftersom tillståndet är m går det att skatta m utan att använda (3)? Ja, lös ut m ur (2) och sätt in mätsignalerna.
- Observatör ser framkomligt ut.

Exempel 1: konsistensrelation

Efter substitution av mätsignaler har vi endast två ekvationer kvar

$$\dot{m} = u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1)$$
$$y_1 V(y_1, y_2) = mRT$$

Derivera ekvation 2 och sätt in ger

$$\frac{d}{dt}(y_1 V(y_1,y_2)) - RT(u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1)) = 0$$

Derivatan ingår linjärt så

$$\dot{r} + \alpha r = \frac{d}{dt}(y_1 V(y_1,y_2)) - RT(u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1))$$

Med tillståndet $w = r - y_1 V(y_1, y_2)$ så får vi realiseringen

$$\dot{w} = -\alpha(w + y_1 V(y_1,y_2)) - RT(u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1))$$
$$r = w + y_1 V(y_1, y_2)$$

Exempel 1: observatör

Efter substitution av mätsignaler har vi endast två ekvationer kvar

$$\dot{m} = u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1)$$
$$y_1 V(y_1, y_2) = mRT$$

Använd andra ekvationen som mätekvation och återkoppling för att skatta tillståndet m

$$\dot{\hat{m}} = u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1) + K(y_1 V(y_1, y_2) - \hat{m}RT)$$
$$r = y_1 V(y_1, y_2) - \hat{m}RT$$

Exempel 2: Isolera från fel f_4

För att isolera från fel f_4, använd ej ekvation (5).

$$M\ddot{h} = -Mg + F_b(p, h) - \mu\dot{h} + f_1 \quad (1)$$
$$pV(p, h) = mRT \quad (2)$$
$$\dot{m} = u_1 g_1(p) + u_2 g_2(p) + f_2 \quad (3)$$
$$y_1 = p + f_3 \quad (4)$$
$$y_2 = h + f_4 \quad (5)$$

Om en residual kan skapas med hjälp av ekvationerna 1-4 så har vi isolerat f_1, f_2, och f_3 från fel f_4.

Exempel 2: konsistensrelation

Substituera in mätekvationen $y_1 = p$ så får vi

$$M\ddot{h} = -Mg + F_b(y_1, h) - \mu\dot{h}$$
$$y_1 V(y_1, h) = mRT$$
$$\dot{m} = u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1)$$

Här vill vi eliminera de obekanta h och m. Inte lika enkelt som förra gången!

Det visar sig att vi måste derivera ekvation (2) tre gånger vilket leder till att $y^{(3)}$ kommer att ingå i konsistensrelationen.

Konsistensrelationsmetoden verkar svår, prova observatörsdesign!

Exempel 2: observatör

Skriv systemet på tillståndsform $x = (h, \dot{h}, m)$

$$\begin{aligned} M\ddot{h} &= -Mg + F_b(y_1, h) - \mu\dot{h} \\ y_1 V(y_1, h) &= mRT \\ \dot{m} &= u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g + \frac{1}{M} F_b(y_1, x_1) - \frac{\mu}{M} x_2 \\ \dot{x}_3 &= u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1) \\ 0 &= y_1 V(y_1, x_1) - x_3 RT \end{aligned}$$

Igen, med sista ekvationen som mätekvation så får vi en residualgenerator på formen

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 & &+K_1(y_1 V(y_1, \hat{x}_1) - \hat{x}_3 RT) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -g + \frac{1}{M} F_b(y_1, \hat{x}_1) - \frac{\mu}{M}\hat{x}_2 & &+K_2(y_1 V(y_1, \hat{x}_1) - \hat{x}_3 RT) \\ \dot{\hat{x}}_3 &= u_1 g_1(y_1) + u_2 g_2(y_1) & &+K_3(y_1 V(y_1, \hat{x}_1) - \hat{x}_3 RT) \\ r &= y_1 V(y_1, \hat{x}_1) - \hat{x}_3 RT \end{aligned}$$

där K_i väljs så att $\hat{x} \to x$, dvs. vi har stabilitet.

Sammanfattning: Konsistensrelationer vs observatörer

+ Avkoppling "enkelt", iallafall systematiskt
+ Stabilitet hos residualgeneratorer ingen fråga
- Derivatauppskattningar

-/+ Behov av derivataskattningar kan minska, men kräver speciella omständigheter och svårt att nå ända fram

- Avkoppling är svårt men ibland möjligt

+ Observatörsdesign; standardmässig där etablerad metodik kan användas
+ Inget problem med realisering av residualgeneratorn, den fås direkt på tillståndsform.

TSFS06 Diagnos och övervakning
Föreläsning 7 - Olinjär residualgenerering

Erik Frisk

Institutionen för systemteknik
Linköpings universitet
erik.frisk@liu.se

2020-04-24