Lösningsförslag till Tentamen

TSFS06 Diagnos och övervakning
14 augusti, 2007, kl. 14.00-18.00

Tillåtna hjälpmedel: TeFyMa, Beta, Physics Handbook, Reglerteknik (Glad och Ljung), Formelsamling i statistik och signalteori och miniräknare.

Ansvarig lärare: Erik Frisk, tel 285714.

Betyg rapporteras in och anslås senast den 28:e augusti

Visning av skrivningen sker kl. 11.30 den 29:e augusti på Fordonssystem.

Totalt 40 poäng.
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: 18 poäng
Betyg 4: 25 poäng
Betyg 5: 30 poäng

Uppgift 1.

a) Det generella villkoret är att C-matrisen ej har full rad-rang. Det aktuella exemplet har ingen statisk redundans, däremot existerar dynamisk redundans.

b) 2.

c)

$$\begin{aligned}\dot{y}_2 - 3y_2 - y_1 - u_2 &= 0\\ \ddot{y}_1 - 3\dot{y}_1 + 2y_1 - u_1 &= 0\end{aligned}$$

d) Väljer den första konsistensrelationen eftersom den har lägre gradtal. Realisering sker genom att ansätta

$$\dot{r} + 2r = \dot{y}_2 - 3y_2 - y_1 - u_2$$

och välja tillståndsvariabel $w = r - y_2$ vilket ger

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -2w - y_1 - 5y_2 - u_2\\ r &= w + y_2\end{aligned}$$

Uppgift 2.

a) Med $x = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$ fås tillståndsformen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -\frac{\mu_1 + f_{\mu 1}}{J_1}x_2 - \frac{K}{nJ_1}(x_3 - \frac{x_1}{n}) + \frac{1}{J_1}(T + f_u)\\ \dot{x}_3 &= x_4\\ \dot{x}_4 &= -\frac{\mu_2 + f_{\mu 2}}{J_2}x_4 - \frac{K}{J_2}(x_3 - \frac{x_1}{n}) - \frac{mgd}{J_2}\cos x_3\\ y_1 &= x_2 + f_1\\ y_2 &= x_3 + f_2\end{aligned}$$

där f_1 och f_2 modellerar fel i sensorerna, f_u fel i motorn, och $f_{\mu 1}$ samt $f_{\mu 2}$ förändrad friktion i de båda lagren.

b) För att isolera felet $f_{\mu 2}$ från f_u behövs en konsistensrelation vars konsistens bryts av ett fel $f_{\mu 2}$ men inte av f_u, dvs. ekvationen för $\dot{x}_2$ får ej användas. Derivera ekvationen för $\dot{x}_4$ och gör lämpliga substitutioner för att få

$$\dddot{y}_2 + \frac{\mu_2}{J_2}\ddot{y}_2 + \frac{K}{J_2}(\dot{y}_2 - \frac{y_1}{n}) - \frac{mgd}{J_2}\dot{y}_2 \sin y_2 = 0$$

c) Sensorfelen är detekterbara då det finns redundans från både y_1 och y_2. Att f_1 är starkt detekterbar syns direkt i konsistensrelationen ovan då y_1 ingår linjärt i uttrycket.

Felet f_2 är också starkt detekterbar. Det ses genom att den enda ekvationer som innehåller x_3 (vilket är variabeln som y_2 mäter) oderiverad är ekvationerna för $\dot{x}_2$ och $\dot{x}_4$. Eliminering av x_1 genom lämplig linjärkombination ger konsistensrelationen

$$\frac{1}{J_2}\dot{y}_1 - \frac{1}{nJ_1}\ddot{y}_2 = -\frac{\mu_1}{J_1J_2}y_1 + \frac{1}{J_1J_2}T + \frac{\mu_2}{nJ_1J_2}\dot{y}_2 + \frac{mgd}{nJ_1J_2}\cos y_2$$

ur vilken man kan se att även f_2 starkt detekterbart på grund av att $\cos y_2$ ingår som den gör.

Uppgift 3.
Med $x = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$ fås tillståndsformen

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{\mu_1 + f_{\mu 1}}{J_1} x_2 - \frac{K}{nJ_1}(x_3 - \frac{x_1}{n}) + \frac{1}{J_1}(T + f_u) \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= -\frac{\mu_2 + f_{\mu 2}}{J_2} x_4 - \frac{K}{J_2}(x_3 - \frac{x_1}{n}) - \frac{mgd}{J_2}\cos x_3 \\
y_1 &= x_2 + f_1 \\
y_2 &= x_3 + f_2
\end{aligned}$$

Jag väljer att avkoppla felet i y_1, dvs. den enda mätsignal som är tillgänglig för residualgeneratorn är y_2.

Att göra en fullständig observerbarhetsanalys ligger utanför vad som krävs i den här kursen. Ett sätt att troliggöra observerbarhet är att rita ett flödesschema för hur olika tillstånd påverkar y_2 och ur det kan man se att alla tillståndsvariabler påverkar y_2. Detta gör det troligt att alla tillstånd är observerbara från y_2.

Ett lite mer analytiskt sätt är att observera att om man sätter in y_2 i olinjäriteten $\cos x_3$ i den sista dynamiska ekvationen så fås ett linjärt system och linjär metodik kan användas (dock blir det jobbiga räkningar).

Ett annat sätt är att ta fram derivera y_2 upp till 3 gånger, dvs.

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \dot{y}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \dddot{y}_2 \end{pmatrix} = G(x)$$

och se om $\frac{dG(x)}{dx}$ har full kolon-rang. Enkla räkningar ger att $\frac{dG(x)}{dx}$ har följande utseende

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{nJ_2} & 0 & \star & \star \\ \star & \frac{K}{J_1 n} & \star & \star \end{bmatrix}$$

vilken alltid har full rang och alltså är systemet observerbart.

En observatör kan tex. konstrueras som

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 & &+K_1(y_2 - \hat{x}_3) \\
\dot{\hat{x}}_2 &= -\frac{\mu_1}{J_1}\hat{x}_2 - \frac{K}{nJ_1}(\hat{x}_3 - \frac{\hat{x}_1}{n}) + \frac{1}{J_1}T & &+K_2(y_2 - \hat{x}_3) \\
\dot{\hat{x}}_3 &= \hat{x}_4 & &+K_3(y_2 - \hat{x}_3) \\
\dot{\hat{x}}_4 &= -\frac{\mu_2}{J_2}\hat{x}_4 - \frac{K}{J_2}(\hat{x}_3 - \frac{\hat{x}_1}{n}) - \frac{mgd}{J_2}\cos \hat{x}_3 & &+K_4(y_2 - \hat{x}_3) \\
r &= y_2 - \hat{x}_3
\end{aligned}$$

Observatörsförstärkningen kan bestämmas t ex genom Lyapunov-teori.

Uppgift 4.

a) Test 1 är bättre än test 2 eftersom båda testen har samma falskalarmssannolikhet men test 1 har högre eller lika detektionssannolikhet för alla felstorlekar. Inget annat kan sägas utifrån figuren.

b)

$$T_i = \ln \frac{p_{\theta_1}(y_i)}{p_{\theta_0}(y_i)} = \ln \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i-\theta_1)^2}{2\sigma^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i-\theta_0)^2}{2\sigma^2}}} = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma^2}(y_i - \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}) = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma^2}(\theta + e_i - \frac{\theta_0 + \theta_1}{2})$$

Låt $\theta = \theta_1$. Då får vi att

$$E(T_i) = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma^2}(\theta_1 + \overbrace{E(e_i)}^{=0} - \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}) = \frac{(\theta_1 - \theta_0)^2}{2\sigma^2} > 0$$

För fallet att $\theta = \theta_0$ får vi att

$$E(T_i) = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma^2}(\theta_0 + \overbrace{E(e_i)}^{=0} - \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}) = -\frac{(\theta_1 - \theta_0)^2}{2\sigma^2} < 0$$

vilket skulle visas.

c) Ersätt θ_1 med en maximum-likelihood skattning av θ_1, dvs

$$T = \max_{\theta_1} \ \ln \prod_{i=1}^{N} \frac{p_{\theta_1}(y_i)}{p_{\theta_0}(y_i)}$$

Uppgift 5.

a) De två konflikterna är

$$OK(c_1) \wedge OK(c_2), \quad OK(c_1) \wedge OK(c_4)$$

b) De minimala diagnoserna är, i förkortad mängdnotation, $\{c_1\}$ samt $\{c_2, c_4\}$. Eftersom felmodeller saknas kommer alla supermängder till de minimala diagnoserna vara diagnoser. Det totala antalet diagnoser är 10.

c) Antag att komponenterna är trasiga med en sannolikhet $p < 1$. Då betyder det att den första minimala diagnosen $\{c_1\}$ har sannolikheten p att inträffa medan $\{c_2, c_4\}$ sannolikheten p^2. Eftersom $p < 1$ så gäller att $p > p^2$ och alltså är det mest sannolikt att enkelfelet har inträffat. Komponent c_1 bör därför kontrolleras först.

d) Utan antaganden kan det mycket väl vara så att dubbelfelet är troligare än enkelfelet. Så är fallet om t ex c_2 går sönder oftare än c_1 och att ett fel i c_2 oftast leder till ett följdfel i c_4. I verkliga applikationer är det fullt rimligt att olika komponenter är olika tåliga och att fel kan vara beroende av varandra.

Uppgift 6.

a) Låt spänningen över resistor j betecknas u_j och strömmen genom resistorerna betecknas med i. Ekvationerna för systemet blir

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i \\ u_2 &= R_2 i \\ z_1 &= u_1 + u_2 \end{aligned}$$

Mäter vi bara spänningar så är det enda sättet att eliminera den obekanta strömmen i att utnyttja båda ekvationerna som beskriver resistorernas beteende. Alltså går det inte att separera de två felen.

b) Med fler än två resistorer i serie så går det att isolera felen endast med hjälp av voltmetrar. Strömmen i kan då elimineras med endast en delmängd av resistorekvationerna och därmed skapa residualer där varje fel kan avkopplas.

För att ge ett konkret exempel på hur detta kan göras betrakta ett system med $N > 2$ resistorer. Då går det att göra en residual som är känslig för fel i två godtyckliga resistorer j och k på följande vis. Genom att mät spänningen z_2 och z_3 över de två resistorerna j och k får vi följande modell:

$$\begin{aligned} u_j &= R_j i \\ u_k &= R_k i \\ z_2 &= u_j \\ z_3 &= u_k \end{aligned}$$

Genom att eliminera u_j, u_k och i ur ekvationerna får vi

$$R_k z_2 - R_j z_3 = 0$$

som är en konsistensrelation som bara är bryts för fel i resistor j och k. Eftersom j och k var godtyckligt valda så går det att på samma sätt konstruera en residual som är känslig för vilka två fel som helst. Ett exempel på N residualer som ger full enkelfelsisolering är: r_1 är känslig för fel i resistor 1 och N och residual r_i är känslig för fel i resistor $i - 1$ och i för $i = 2, 3, \ldots, N$.