Tentamen med lösningsdiskussion

TSFS06 Diagnos och övervakning
30 maj, 2012, kl. 14.00-18.00

Tillåtna hjälpmedel: TeFyMa, Beta, Physics Handbook, Reglerteknik (Glad och Ljung), Formelsamling i statistik och signalteori samt miniräknare.

Ansvarig lärare: Erik Frisk

Totalt 40 poäng.
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: 18 poäng
Betyg 4: 25 poäng
Betyg 5: 30 poäng

Uppgift 1. Antag en modell som beskrivs av en linjär regression

$$y_t = \varphi_t \theta + \epsilon_t, \quad t = 1, \ldots, N$$

där y_t och φ_t är kända/uppmätta variabler, ϵ_t vitt brus, och $\theta \in \mathbb{R}^3$ modellerar tre olika fel. I felfritt fall så är $\theta = \theta_0$. Det kan antas att felen varierar långsamt och kan antas konstanta i begränsade tidsintervall.

a) Skapa två test som detekterar förändringar i θ. Det ena baserad på en parameterskattning och den andra via prediktionsfelen. (2 poäng)

b) Diskutera egenskaper, fördelar, nackdelar, med de två olika testen från a-uppgiften. (2 poäng)

c) Skapa ett test som isolerar fel 2 och 3 från fel 1, dvs., förändringar i θ_2 och θ_3 från θ_1 i $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. (2 poäng)

Lösning.

a) Låt

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}$$

då kan teststorheter skapas som

$$T_{\text{param}}(y, u) = |\arg\min_\theta \sum_{t=1}^{N} (y_t - \varphi_t \theta)^2 - \theta_0|^2 = |(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y - \theta_0|^2$$

$$T_{\text{pem}}(y, u) = \sum_{t=1}^{N} (y_t - \varphi_t \theta_0)^2 = |Y - \Phi \theta_0|^2$$

b) En fördel med prediktionsfelsansatsen är att ingen hänsyn behöver tas till grad av excitation, något som drabbar parameterskattningsansatsen. detta kan dock åtgärdas via normalisering. En fördel med parameterskattningsansatsen är att den har högre styrka än prediktionsfelsansatsen.

c) Låt Φ_i beteckna kolumn i i matrisen Φ och θ_j^0 det nominella värdet för parametern θ_j. Då kan ett test exempelvis skapas som

$$T_{\text{pem},2}(y, u) = \min_{\theta_1} \sum_{t=1}^{N} (y_t - \varphi_t \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2^0 \\ \theta_3^0 \end{pmatrix})^2 = |Y - \Phi \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \theta_2^0 \\ \theta_3^0 \end{pmatrix}|^2$$

där

$$\hat{\theta}_1 = (\Phi_1^T \Phi_1)^{-1} \Phi_1^T (Y - \begin{pmatrix} \Phi_2 & \Phi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2^0 \\ \theta_3^0 \end{pmatrix})$$

Uppgift 2.

a) För ett tidskontinuerligt linjärt system, med 2 modellerade fel, på formen

$$H(p)x + L(p)z + F_1(p)f_1 + F_2(p)f_2 = 0,$$

ange hur man avgör om felen är detekterbara, starkt detekterbara, samt isolerbara från varandra. (2 poäng)

b) Antag ett linjärt system som beskrivs av den observerbara kanoniska formen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} (\alpha-1) & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

Låt $\alpha = -1$ och konstruera två linjära residualgenerator för modellen, en via en konsistensrelation och en via en observatör. För lösningen baserad på en konsistensrelation är det tillåtet att anta att derivator av mätsignalen finns tillgängliga. (2 poäng)

c) Finns det en residualgenerator med bara 1 tillstånd för systemet från b-uppgiften? Blir det någon skillnad om $\alpha = 1$? (2 poäng)

Lösning.

a) Detekterbara om

$$\text{rank}\begin{pmatrix} H(s) & F_i(s) \end{pmatrix} > \text{rank}\, H(s)$$

Starkt detekterbara om

$$N_H(s)F_i(s)|_{s=0} \neq 0$$

och f_1 isolerbart från f_2 om

$$\text{rank}\begin{pmatrix} H(s) & F_1(s) & F_2(s) \end{pmatrix} > \text{rank}\begin{pmatrix} H(s) & F_2(s) \end{pmatrix}$$

b) Observatörslösning:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \begin{pmatrix} (\alpha-1) & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} u + K(y - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}) \\ r &= y - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}\end{aligned}$$

Eftersom systemet var skrivet på observerbar kanonisk form så är modellen observerbar och polerna hos residualgeneratorn kan placeras godtyckligt med hjälp av observatörsförstärkningen K.

Konsistensrelation:

$$\begin{aligned}&y = x_1 \\ &\dot{y} = \dot{x}_1 = (\alpha-1)x_1 + x_2 + u = (\alpha-1)y + x_2 + u \\ &\ddot{y} = (\alpha-1)\dot{y} + \dot{x}_2 + \dot{u} = (\alpha-1)\dot{y} + \alpha x_1 - \alpha u + \dot{u} = (\alpha-1)\dot{y} + \alpha y - \alpha u + \dot{u}\end{aligned}$$

vilket ger

$$r = \ddot{y} - (\alpha-1)\dot{y} - \alpha y + \alpha u - \dot{u}$$

c) B-uppgiften ger att modellen beskriver differentialekvationen

$$(p+1)(p-\alpha)y = (p-\alpha)u$$

Om $\alpha < 0$, dvs. om polerna ligger i vänster halvplan, så kommer

$$R(p) = \frac{1}{p+\beta}\begin{pmatrix} p+1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}, \beta > 0$$

att vara en första ordningens residualgenerator. Däremot, om $\alpha > 0$ och vi har poler i höger halvplan kommer samma residualgenerator få instabil intern form på residualen eftersom instabila poler är bortförkortade vid härledning av uttrycket.

Uppgift 3. Antag en beslutsstruktur enligt tabellen

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
r_1		X	X		X
r_2	X		X	X	
r_3		X		X	
r_4	X		X		
r_5			X		X

a) Antag att alla residualer känsliga för fel f_3 reagerat. Skriv ned alla genererade konflikter med logiknotation samt ange vilka som är minimala. Ta också fram alla minimala diagnoser och hur många diagnoser det finns totalt. Ange vilka, om några, antaganden som gjorts i lösningen. (3 poäng)

b) Diskutera effekterna av falsklarm respektive missade detektion på resultatet av felisoleringen. (2 poäng)

c) Beräkna ideal isolerbarhetsprestanda för diagnossystemet ovan. Antag att trösklarna är satta så att man inte kan anta att systemet alltid detekterar alla felstorlekar. (2 poäng)

Lösning.

a) De genererade konflikterna är

$$\begin{aligned}
&OK(C_2) \wedge OK(C_3) \wedge OK(C_5) \\
&OK(C_1) \wedge OK(C_3) \wedge OK(C_4) \\
&OK(C_1) \wedge OK(C_3) && \text{(minimal)} \\
&OK(C_3) \wedge OK(C_5) && \text{(minimal)}
\end{aligned}$$

De minimala diagnoserna blir då

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &= OK(C_1) \wedge OK(C_2) \wedge \neg OK(C_3) \wedge OK(C_4) \wedge OK(C_5) \\
\mathcal{D}_2 &= \neg OK(C_1) \wedge OK(C_2) \wedge OK(C_3) \wedge OK(C_4) \wedge \neg OK(C_5)
\end{aligned}$$

Om man antar minimala diagnoshypotesen, dvs. att alla supermängder av diagnoser också är diagnoser så får vi

$$|\mathcal{D}| = 2^4 + 2^2 = 20$$

Det finns 2^4 supermängder till $\mathcal{D}_1$ och det finns 2^2 supermängder till $\mathcal{D}_2$ som inte redan är supermängder till $\mathcal{D}_1$

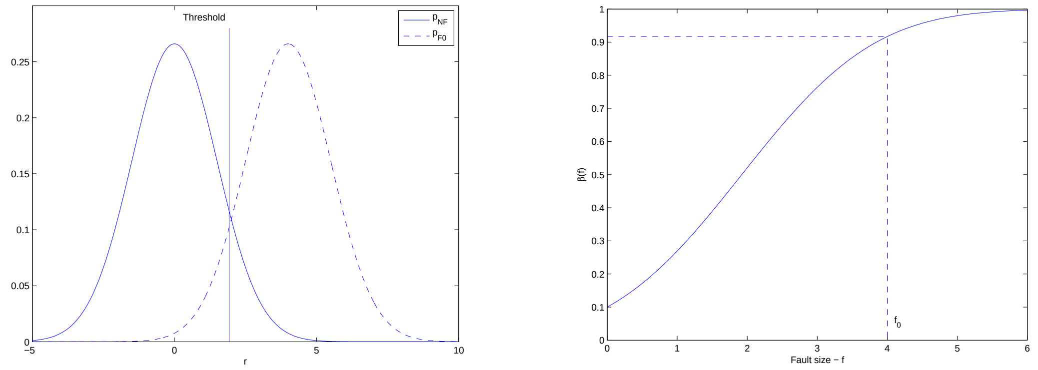
b) Missad detektion ger ett resultat som inte är så precist som annars, men den rätta diagnosen är fortfarande med i resultatet. Falsklarm däremot introducerar falska diagnoser. Vilken situation som är värst är applikationsspecifikt men ofta är det värre att ha falska resultat och man bör därför akta sig för falsklarm.

c) Isolerbarhetsmatrisen blir

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	X		X		
f_2		X			
f_3			X		
f_4				X	
f_5			X		X

där ett X på position (i, j) indikerar att fel j ej kan isoleras från fel i.

Uppgift 4. I figur (a) nedan är täthetsfunktionen för en residual plottad för dels det felfria fallet (heldragen) och dels då vi har ett fel av storlek $f = f_0$ (streckad). Tröskel för residualen ges av det lodräta strecket. I figur (b) har styrkefunktionen $\beta(f)$ plottats och de streckade linjerna indikerar styrkefunktionens värde för felstorleken $f = f_0$.



(a) (b)

Figur 1: Täthets och styrkefunktion.

a) Ange definitionen på styrkefunktionen och beskriv vad den kan användas till. Diskutera vilka problem som finns med att ta fram styrkefunktioner i realistiska fall. Ange möjlig väg att hantera dessa problem. (2 poäng)

b) Skissa i (a)-figuren vilken area som motsvaras av styrkefunktionens värde i $f = f_0$ och ange även falsklarmssannolikheten. (2 poäng)

c) CUSUM-algoritmen kan skrivas som

$$T_k = \max(0, T_{k-1} + s_k), \quad T_0 = 0$$

där T_k är signalen som används för detektion och s_k är en så kallad *score function*. Ange vilken egenskap s_k måste ha samt hur s_k kan skapas utifrån en residual r. (2 poäng)

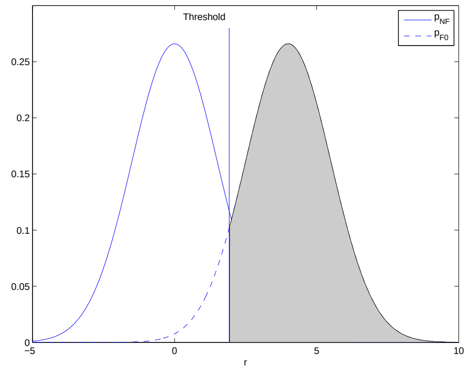
Lösning.

a) Styrkefunktionen definieras som

$$\beta(f) = P(\text{alarm}|f) = P(T(z) > J|f)$$

och kan användas till att utvärdera prestanda hos ett test. Ett problem i realistiska fall är att det inte går att analytiskt räkna ut sannolikheten och ett möjligt sätt är att förlita sig på mätdata och göra en frekvensanalys eller, om man har modeller som är realistiska, göra Monte-Carlo simuleringar.

b) Falsklarmssannolikheten är $\beta(0) = 0.1$ och arean illustreras i figuren

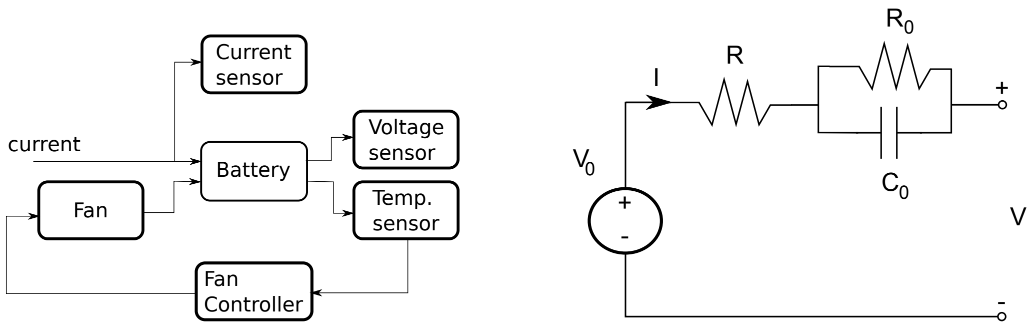


c) För att det ska vara en *score-function* ska den ha egenskapen $E(s_t) < 0$ då systemet är felfritt och $E(s_t) > 0$ då vi har fel. Ett sätt att skapa en score-function från en residual är

$$s_t = |r_t| - \nu$$

där ν är en lämpligt vald driftsfaktor.

Uppgift 5. Figur (a) nedan visar en systemskiss med ett luftkylt batteri där man mäter uttagen ström, spänning hos batteriet samt temperatur. Ett vanligt sätt att modellera batterier är via en kretsekvivalent. En enkel batterimodell visas i figur (b) där resistanserna R och R_0 samt kapacitansen C_0 modellerar batteriets inre impedans.



(a) (b)

Figur 2: Systemskiss och kretsmodell över batteriet.

En enkel modell över batteriets temperatur T samt laddningsgrad SOC (State of charge) kan skrivas som

$$\frac{d}{dt}V_c = \frac{1}{C_0}(I - \frac{V_c}{R_0})$$
$$\frac{d}{dt}T = \frac{1}{m_c}(RI^2 - k_{fan}(u)(T - T_{amb}))$$
$$\frac{d}{dt}SOC = -\frac{1}{b_{cap}}I$$

där V_c är spänningen över kondensatorn C_0 och I strömmen som tas ut ur batteriet. Insignal u är styrsignalen till fläkten som påverkar värmeledningskoefficienten via den kända funktionen $k_{fan}(u)$. Övriga parametrar i modellen är batteriets värmekapacitet m_c [kJK^{-1}], öppen batterispänning V_0 [V], omgivningstemperatur T_{amb} [K] samt batteriets nominella kapacitet b_{cap} [Ah]. Dessa parametrar kan antas kända. Utspänningen hos batteriet ges av

$$V = V_0 - RI - V_c$$

och mätekvationerna av

$$y_1 = V$$
$$y_2 = T$$
$$y_3 = I$$

a) Modellera, och inför i modellen, följande fel (1 poäng)

1. Fel i sensorerna (f_1, f_2, f_3)
2. Fel i fläkten (f_{fan})
3. Förändringar i batteriets kapacitet (f_{cap})

b) Konstruera ett antal residualgeneratorer som, tillsammans, kan detektera alla detekterbara fel. (2 poäng)

c) Konstruera residualgenerator som isolerar fel i spänningsmätningen (y_1) från fel i strömmätningen (y_3). (2 poäng)

d) Avgör vilka fel som är detekterbara och isolerbara från varandra. Endast enkelfel behöver beaktas. Sammanfatta resultaten med en isolerbarhetsmatris. (2 poäng)

e) I en realistisk situation är parametrarna R, R_0, C_0, samt V_0 starkt beroende på batteritemperaturen T och laddningsgrad SOC. Diskutera hur diagnosproblemet och isolerbarhetsegenskaperna påverkas av dessa beroenden. (3 poäng)

Lösning.
Not: Den här lösningen innehåller resonemang som går utanför vad som skulle krävas för full poäng på tentamen.

a) Ett exempel på hela modellen, med införda felmodeller, är:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_c &= \frac{1}{C_0}(I - \frac{V_c}{R_0}) \\
\frac{d}{dt}T &= \frac{1}{m_c}(RI^2 - k_{fan}(u + f_{fan})(T - T_{amb})) \\
\frac{d}{dt}SOC &= -\frac{1}{b_{cap} + f_{cap}}I \\
\dot{f}_{cap} &= 0 \\
V &= V_0 - RI - V_c \\
y_1 &= V + f_1 \\
y_2 &= T + f_2 \\
y_3 &= I + f_3
\end{aligned}$$

b) Det är klart att f_{cap} inte är detekterbart eftersom SOC ej påverkar någon annan variabel och vi mäter ej heller SOC direkt.

Felen f_2, f_3, och f_{fan} kan detekteras via konsistensrelationen som kan härledas genom att sätta in mätsignalerna i ekvationen för temperaturdynamiken

$$\dot{y}_2 - \frac{1}{m_c}(Ry_3^2 - k_{fan}(u)(y_2 - T_{amb})) = 0$$

Införande av residualdynamik ger

$$\dot{r}_1 + \beta r_1 = \dot{y}_2 - \frac{1}{m_c}(Ry_3^2 - k_{fan}(u)(y_2 - T_{amb})), \quad \beta > 0$$

vilket kan skrivas på tillståndsform, med tillståndet $w = r_1 - y_2$, som

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -\beta(w + y_2) - \frac{1}{m_c}(Ry_3^2 - k_{fan}(u)(y_2 - T_{amb}))\\ r_1 &= w + y_2\end{aligned}$$

för att detektera f_1, derivera ekvationen för utspänningen och substituera in mätekvationerna för att härleda konsistensrelationen

$$\begin{aligned}\dot{V} = -R\dot{I} - \dot{V}_c = -R\dot{I} - \frac{1}{C_0}(I - \frac{V_c}{R_0}) = -R\dot{I} - \frac{1}{C_0}(I - \frac{V_0 - RI - V}{R_0}) &= \\ = -R\dot{y}_3 - \frac{1}{C_0}(y_3 - \frac{V_0 - Ry_3 - y_1}{R_0}&)\end{aligned}$$

vilket ger konsistensrelationen

$$\dot{y}_1 + R\dot{y}_3 + \frac{1}{C_0}(y_3 - \frac{V_0 - Ry_3 - y_1}{R_0}) = 0$$

Igen, introducera residualgeneratordynamik

$$\dot{r}_2 + \beta r_2 = \dot{y}_1 + R\dot{y}_3 + \frac{1}{C_0}(y_3 - \frac{V_0 - Ry_3 - y_1}{R_0}), \quad \beta > 0$$

och realisera på tillståndsform med tillstånd $w = r_2 - y_1 - Ry_3$ som

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -\beta(w + y_1 + Ry_3) + \frac{1}{C_0}(y_3 - \frac{V_0 - Ry_3 - y_1}{R_0})\\ r_2 &= w + y_1 + Ry_3\end{aligned}$$

c) Vi vill skapa en residual känslig för fel i spänningsmätningen och okänslig för fel i strömmätningen, dvs., vi får inte använda sensorsignal y_3. Ett sätt att göra det på är en observatörslösning där man först löser ut den okända strömmen I ur ekvationen för utspänningen och substituerar in y_1

$$I = \frac{1}{R}(V_0 - V_c - V) = \frac{1}{R}(V_0 - V_c - y_1)$$

Substituera sedan in uttrycket i ekvationerna som beskriver V_c och T

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V_c &= \frac{1}{C_0}(\frac{1}{R}(V_0 - V_c - y_1) - \frac{V_c}{R_0})\\ \frac{d}{dt}T &= \frac{1}{m_c}(\frac{1}{R}(V_0 - V_c - y_1)^2 - k_{fan}(u)(T - T_{amb}))\\ y_2 &= T\end{aligned}$$

Vi har nu en tillståndsform där vi kan konstruera en observatör, exempelvis via ett Extended Kalman Filter, och skapa en residual

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{V}_c &= \frac{1}{C_0}(\frac{1}{R}(V_0 - \hat{V}_c - y_1) - \frac{\hat{V}_c}{R_0}) + K_1(y_2 - \hat{T})\\ \frac{d}{dt}\hat{T} &= \frac{1}{m_c}(\frac{1}{R}(V_0 - \hat{V}_c - y_1)^2 - k_{fan}(u)(\hat{T} - T_{amb})) + K_2(y_2 - \hat{T})\\ r_3 &= y_2 - \hat{T}\end{aligned}$$

d) Utelämnar det icke detekterbara felet f_{cap}, med de tre residualerna från b och c-uppgifterna har vi följande ideala felsignaturer

	f_1	f_2	f_3	f_{fan}
r_1		X	X	X
r_2	X		X	
r_3	X	X		X

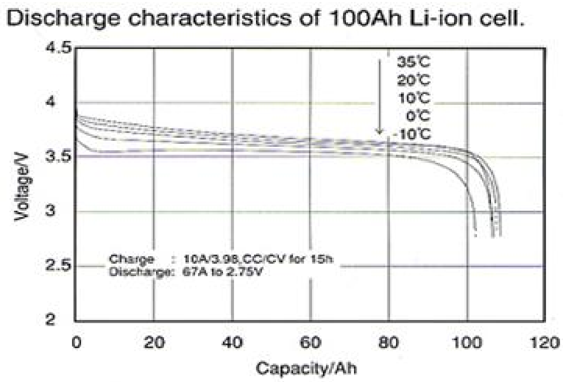
vilket ger isolerbarhetsmatris (notera ordningen på felen)

	f_1	f_3	f_2	f_{fan}
f_1	X			
f_3		X		
f_2			X	X
f_{fan}			X	X

Det går alltså inte att isolera f_2 från f_{fan} eller tvärtom. Detta är naturligt eftersom både T och u endast påverkar samma ekvation, temperaturdynamiken, så försöker vi avkoppla det ena kommer vi automatiskt att avkoppla det andra felet.

f) Här har vi beroende av temperatur T och laddningsgrad SOC i parametrarna $R(T, SOC)$, $R_0(T, SOC)$, $C_0(T, SOC)$, och $V_0(T, SOC)$. Om man tar med beroendet på exempelvis SOC i V_0 så innebär det att man får information om SOC i mätningen av V och därmed kommer också förändringar i batterikapaciteten f_{cap} att bli detekterbar.

I princip kan samma teknik som användes för att härleda r_1 och r_2 användas, dock kommer det krävas att vi dels kan derivera $R(T, SOC)$. För att vi ska få detekterbarhet så krävs det också att derivatan är nollskild. Observatörslösningen i r_3 har inte samma problem och är lättare att generalisera till det mer olinjära fallet. Dock måste vi skatta SOC med observatören eftersom vi inte direkt kan mäta SOC. För bakgrundsinformation, såhär kan V_0-karaktäristiken se ut för Litium-jon cell:



Uppgift 6. Antag att vi har tre sensorer som mäter samma storhet x enligt

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x + \epsilon_1 \\
y_2 &= x + \epsilon_2 \\
y_3 &= x + \epsilon_3
\end{aligned}
$$

där ϵ_i, $i = 1, 2, 3$ är oberoende brus med väntevärde 0 och varians σ_i^2. Antag vi vill detektera fel i sensor 3. Beräkna en linjär residualgenerator, dvs. bestäm radvektorn L i uttrycket

$$
r = Ly = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},
$$

så att r har optimalt fel till brusförhållande. Fel till brusförhållande, FNR, definieras som kvoten mellan kvadraten på väntevärdet för residualen vid ett fel och variansen hos residualen i felfritt fall,

$$\text{FNR} = \frac{(E_f(r))^2}{E_{NF}(r^2)}.$$

Ge en tolkning av den optimala lösningen. (5 poäng)

Lösning.
Not: Den här lösningen innehåller resonemang som går utanför vad som skulle krävas för full poäng på tentamen.

Först kan man konstatera att för att r ska vara en residual så måste $E(r) = 0$ i det felfria fallet vilket innebär att

$$E(r) = (l_1 + l_2 + l_3)x = 0$$

och alltså måste

$$l_1 + l_2 + l_3 = 0 \tag{1}$$

Nu kan vi skriva nämnaren i FNR

$$E_{NF}(r^2) = E_{NF}((l_1y_1 + l_2y_2 + l_3y_3)^2) = l_1^2\sigma_1^2 + l_2^2\sigma_2^2 + l_3^2\sigma_3^2$$

där vi i sista likheten utnyttjat att ϵ_i är oberoende samt (1). Täljaren blir

$$E_f(r))^2 = l_3^2 f^2$$

Vi vill alltså lösa optimeringsproblemet

$$\begin{aligned} &\max_{l_1,l_2,l_3} \quad \frac{l_3^2 f^2}{l_1^2\sigma_1^2 + l_2^2\sigma_2^2 + l_3^2\sigma_3^2} \\ &s.t. \quad l_1 + l_2 + l_3 = 0 \end{aligned}$$

Det här problemet i 3 variabler med bivillkor kan enkelt transformeras till ett envariabelproblem. Notera att l_3 måste vara skild från 0, annars kan vi inte detektera felet överhuvudtaget. Vi kan därför sätta $l_3 = 1$ eftersom vi alltid kan skala en lösning hur vi vill utan att ändra FNR. Via (1) blir dessutom $l_2 = -1 - l_1$ som kan substitueras in. Optimeringsproblemet blir då ekvivalent med

$$\min_{l_1} \quad l_1^2\sigma_1^2 + (-1 - l_1)^2\sigma_2^2$$

Den optimala lösningen kan nu direkt räknas fram till

$$l_1 = -\frac{1/\sigma_1^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2},\ l_2 = -\frac{1/\sigma_2^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2},\ l_3 = 1$$

vilket ger den optimala residualen

$$r = y_3 - \frac{1}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2}(1/\sigma_1^2 y_1 + 1/\sigma_2^2 y_2)$$

Den optimala residualen är alltså y_3 minus ett viktat medelvärde av y_1 och y_2 där vikterna är 1/variansen på motsvarande sensor.

Tittar man termen $l_1y_1 + l_2y_2$ specifikt så ser man att

$$\begin{aligned} E_{NF}(l_1y_1 + l_2y_2) &= x \\ var(l_1y_1 + l_2y_2) &= l_1^2\sigma_1^2 + (-1 - l_1)^2\sigma_2^2 \end{aligned}$$

dvs. den termen svarar mot en minimum-variansskattning $\hat{x}_{mv}(y_1, y_2)$ av variabeln x från mätsignalerna y_1 och y_2, vilket innebär att residualen är

$$r = y_3 - \hat{x}_{mv}(y_1, y_2)$$

Vi kan också observera att den optimala lösningen är helt oberoende på variansen på bruset i sensor 3 vilket är fullt naturligt, felet och bruset i sensor 3 kommer in på precis samma sätt och det är inget vi kan göra åt den saken.