Uppgifter till kurs: Geometriska analys och designmetoder för olinjära system

Erik Frisk

2 juni 2010

Uppgift 1. Antag ett linjärt system som beskrivs av exkvationerna:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

med $n = 4$ tillstånd, $k = 2$ insignaler och $m = 1$ utsignaler. Matriser för denna upgift finns definierade i filen `uppg1.mat`.

a) Låt rummet $\mathcal{V}$ spännas upp av kolumnerna i matrisen `V`. Visa (numeriskt) att $\mathcal{V}$ är A-invariant.

b) Vilka av B:s kolumner ligger i $\mathcal{V}$?

c) Hitta en variabeltransformation $x = Tz$ så att systemet transformeras till blocktriangulär form. Beskriv metodik, inte bara en numerisk matris. Hur representeras $x \in \mathcal{V}$ i den nya basen?

   Transformera systemet.

d) Gör om c-uppgiften, fast uttryck variabelbytet som $z = Tx$, dvs. inversen till c-uppgiftens transformation. Såklart är det inte meningen att bara invertera transformationen från c-uppgiften.

   Tips: noll-rum är användbara.

e) Vilket förhållande har $\mathcal{V}$ till det styrbara underrumet (från de båda insignalerna respektive), det observerbara underrumet?

f) Avgör huruvida insignalerna påverkar utsignalen eller inte. Formulera och verifiera villkoren för detta med hjälp av $\mathcal{V}$.

Uppgift 2. Denna uppgift handlar om hur man numeriskt kan räkna med linjära rum. Algoritmer ska konstrueras för att implementera vanliga operationer på linjära rum. Dessa kommer även senare att generaliseras för distributioner.

Genomgående gäller konventionen att A (utan krusiduller) är en matris vars kolumner spänner upp rummet $\mathscr{A}$ (med krusiduller), dvs.

$$\text{Im } A = \mathscr{A}$$

a) Implementera en algoritm i Matlab som givet matriserna A och B räknar ut en bas för rummet $\mathscr{A} + \mathscr{B}$.

b) Givet en avbildningsmatris T och en bas V för $\mathscr{V}$, hitta en bas för $T\mathscr{V}$.

c) Gör om a-uppgiften fast för $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$.

d) Givet en matris A, hitta en bas för det komplementära rummet $\mathscr{A}^\perp$, dvs. rummet av alla vektorer som är ortogonala mot vektorerna i $\mathscr{A}$.

Uppgift 3. Matriser för denna upgift finns definierade i filen `uppg2.mat`.

a) Härled och, med hjälp av föregående uppgift, implementera en algoritm som räknar ut en bas för det minsta A-invarianta rummet som innehåller $\mathscr{B}$. Verifiera för exemplet att algoritmen ger förväntat resultat (vad är det förväntade resultatet?)

b) Använd algoritmen från a-uppgiften för att beräkna det *största* underrummet $\mathcal{V}$ som är A-invariant och $\mathcal{V} \subseteq \ker C$.

Tips: Ett sådant $\mathcal{V}$ är nära relaterat till det minsta (duala) rum Ω som är A-invariant och $\operatorname{Im} C \subseteq \Omega$.

Uppgift 4. För att bli lite mer bekväm med de differentialgeometriska operationerna: lie-derivata, lie-produkt och derivatan av ett ko-vektorfält utmed ett vektorfält, bevisa Proposition 1.2.1 och Proposition 1.2.2 i kursmaterialet (sid 9-10).

Uppgift 5. Låt Δ vara icke-singulär, av dimension d, och uppspänd av $f_1(x), \ldots, f_d(x)$ i en omgivning $\mathcal{U}$ av en punkt x^0. Visa att Δ är involutiv om

$$\operatorname{rank}\,(f_1(x), \ldots, f_d(x)) = \operatorname{rank}\,(f_1(x), \ldots, f_d(x), [f_i(x), f_j(x)])$$

för alla $x \in \mathcal{U}$ och alla $1 \leq i, j \leq d$.

Uppgift 6. Visa att definitionen av en invariant ko-distribution (sid 57) är vettig genom att visa att en mjuk (smooth) och icke-singulär distribution Δ är f-invariant om och endast om ko-distributionen $\Delta^\perp$ är f-invariant.

a) Visa att det gäller i det linjära fallet.

b) Visa i det olinjära fallet. Varför är villkoren mjuk och icke-singulär viktiga?

Tips: Lemma 1.6.3 och Proposition 1.2.2 är nyttiga.

Uppgift 7.

a) Bevisa att ett linjärt vektorrum alltid är involutivt.

b) Bevisa att en 1-dimensionell distribution alltid är involutiv.

c) Antag $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, mjuk, icke-singulär, dimension d, och spänns upp av $f_1(x), \ldots, f_d(x)$.

Ge ett tillräckliga villkor för att Δ respeketive $\Delta^\perp$ ska vara involutiva.

Uppgift 8. Visa att lie-produkten $[f(x), g(x)]$ är invariant under variabelbyte $z = \Phi(x)$.

Uppgift 9. I Proposition 1.7.1, sid 50, ges villkor på en distribution Δ för att definiera ett variabelbyte så att modellen delas upp enligt Figur 1.7. Villkoren är (kortfattat):

1. Δ icke-singulär och involutiv.
2. Δ invariant under $f, g_1, \ldots, g_m$.
3. span $\{g_1, \ldots, g_m\} \subset \Delta$

Visa att man får ekvivalenta villkor även om man byter ut det andra villkoret mot

2. Δ invariant under f.

Uppgift 10.

a) För en modell

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

Ange hur modellen ser ut i efter variabelbytet $z = \Phi(x)$.

b) Vi har en modell

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{x_2^2}{x_1^2} + x_1 u \\ \dot{x}_2 &= -\frac{x_2^3}{x_1^3} - x_2 + x_2 u \end{aligned}$$

Utför variabelbytet

$$z = \Phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_2}{x_1} \end{pmatrix}$$

c) Implementera Mathematica-kod som automatiskt gör variabelbytet. Verifiera att din implementation ger samma svar som handräkningen gav i b-uppgiften.

Uppgift 11. En övning i involutiva höljen. Använd med fördel Mathematica för att göra denna uppgift, annars blir det lätt stora räkningar.

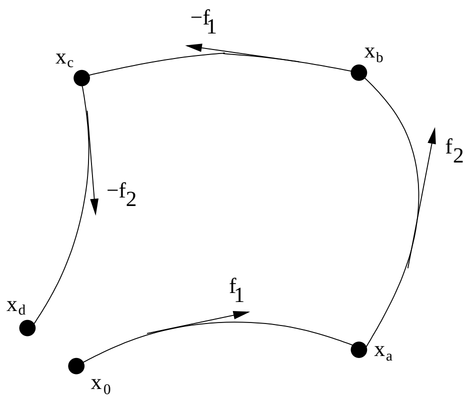
$$f_1(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ e^{x_2} \\ x_1 x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

a) Beräkna det involutiva höljet av $\Delta = \text{span}\,\{f_1\}$.

b) Visa att $\Delta = \text{span}\,\{f_1, f_2\}$ ej är involutiv.

c) Beräkna det involutiva höljet av $\Delta = \text{span}\,\{f_1, f_2\}$.

Uppgift 12. Visa Lie-produktens geometriska tolkning. I figuren nedan så startar vi i punkten x_0, följer f_1 för $t \in [0, h[$, f_2 för $t \in [h, 2h[$, $-f_1$ för $t \in [2h, 3h[$ och $-f_2$ för $t \in [3h, 4h[$.



Visa att $x_d - x_0 = [f_1, f_2](x_0)h^2 + O(h^3)$

Uppgift 13. Låt Δ vara en d-dimensionell, icke-singulär distribution som spänns upp (lokalt) av vektorfälten $f_1(x), \ldots, f_d(x)$. Visa att om λ är en lösning till

$$d\lambda(x)F(x) = 0$$

så är även $\lambda' = g(\lambda)$ en lösning där $g(\lambda)$ en en godtycklig deriverbar funktion.

Uppgift 14. Låt $\Delta = \text{span}\,\{f_1, f_d\}$ vara en icke-singulär distribution.

a) Visa hur man genom att endast lösa *linjära* ekvationssystem kan avgöra om ett vektorfält $g \in \Delta$.

b) Använd lösningen från a-uppgiften för att skissa hur man kan testa om Δ är involutiv.

Uppgift 15. Låt $\Delta = \text{span}\,\{f_1\}$ där

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

a) Verifiera att Δ är icke-singulär i en omgivning runt punkten $x_0 = (0, 1)$.

b) Hitta en lösning $\lambda(x)$ till $d\lambda(x)f_1(x) = 0$. Testa att "fylla ut" med både

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Undersök vilka när $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$ är singulär och kommentera skillnaden i resultat.

Uppgift 16. Avgör om $\omega(x) = (x_2, x_1)$, $\omega(x) = (x_2, -x_1)$, och $\omega(x) = (x_1, x_2)$ är exakta differentialer eller inte.

Kuriosa[1]: Poincare's lemma säger att ett ko-vektorfält $\omega(x) = (\omega_1(x), \ldots, \omega_d(x)$ är en exakt differential (dvs. det existerar en potential för vektorfältet) om och endast om för alla $1 \leq i, j \leq d$ det gäller att:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

[1] Såklart ej tänkt att ni ska lösa uppgiften med detta resultat

Uppgift 17. Ett linjärt rum $\mathcal{V}$ kallas ”controlled invariant” om det existerar ett K, dvs. en återkoppling, så att $\mathcal{V}$ är $(A + BK)$ invariant.

Dualt gäller att ett linjärt rum $\mathcal{V}$ är ”conditioned invariant” om det existerar ett K, dvs. en observatörsåterkoppling, så att $\mathcal{V}$ är $(A + KC)$ invariant.

a) Bevisa att $\mathcal{V}$ är en controlled invariant om och endast om

$$A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V} + \mathrm{Im}\ B$$

b) Bevisa att $\mathcal{V}$ är en conditioned invariant om och endast om

$$A(\mathcal{V} \cap \ker C) \subseteq \mathcal{V}$$

Hjälpsteg för att göra detta kan vara att visa följande små resultat

$$A\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \quad \Leftrightarrow \quad A^T\mathcal{Y}^\perp \subseteq \mathcal{X}^\perp$$

samt

$$(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})^\perp = \mathcal{X}^\perp + \mathcal{Y}^\perp$$

och visa b via dualitet med a-uppgiften.

Uppgift 18. Implementera algoritmen för olinjär residualgenerering som beskrivs i de Persis och Isidori för linjära system.

Testa din algoritm på systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Pd + Lf\\ y &= Cx\end{aligned}$$

där numeriska värden på matriserna finns i filen `lingeo1.mat`.

Avgör, via villkor i artiklarna, vilka av de två felen som är detekterbara.

Uppgift 19. På föreläsningen om residualgenerering togs endast conditioned invariants upp men i artiklarna talas det om så kallade observability (co-)distributions.

Detta visar sig också i algoritmerna då ytterligare en iteration, utöver den som presenterades på föreläsningen, används för att räkna ut lämplig distribution. Vad kan det vara för nytta med detta andra steg?

Testa på systemet som ges av matriserna i filen `lingeo2.mat` för att analysera detta andra steg i ett linjärt fall.

Uppgift 20. I de Persis/Isidoris artiklar om residualgenerering så beräknas en ko-distribution via iterationerna

$$\begin{aligned}S_0 &= P\\ S_{k+1} &= S_k + \sum_{i=1}^m [g_i, S_k \cap \ker\{dh\}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= S^\perp \cap \mathrm{span}\,\{dh\}\\ \Omega_{k+1} &= S^\perp \cap \left(\sum_{i=1}^m L_{g_i}\Omega_k + \mathrm{span}\,\{dh\}\right)\end{aligned}$$

och låt S och Ω beteckna de distributioner där respektive iteration stannar.

Antag nu att båda iterationerna stannar, bevisa att $\Omega^\perp$ är en conditioned invariant.

Förklara varför detta är viktigt i residualgenereringsproblemet.
Uppgift 21. Visa att $\Omega_{\mathcal{O}}^\perp$ är f, g_i-invariant.
Uppgift 22. olinjär uppdelning för styrbarhet/observerbarhet.
Uppgift 23. En distribution Δ är en controlled-invariant för systemet

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

om och endast om $[f, \Delta] \subset \Delta + G$. Det finns en ekvivalent karaktärisering med ko-vekotrfält enligt nedan

$$[f, \Delta] \subset \Delta + G \Leftrightarrow L_f(\Delta^\perp \cap G^\perp) \subset \Delta^\perp$$

Bevisa att den gäller.

Tips: Formel (1.12) i Isidori kan vara till god hjälp.