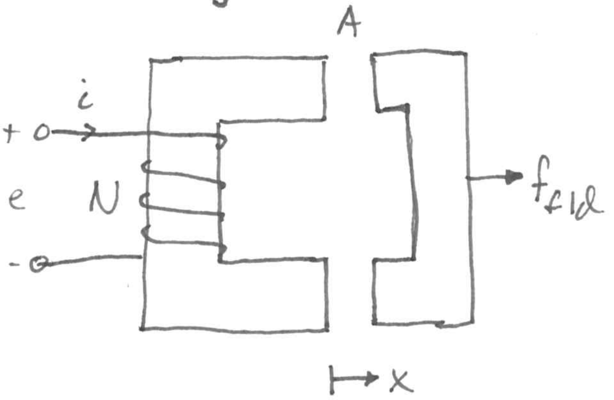
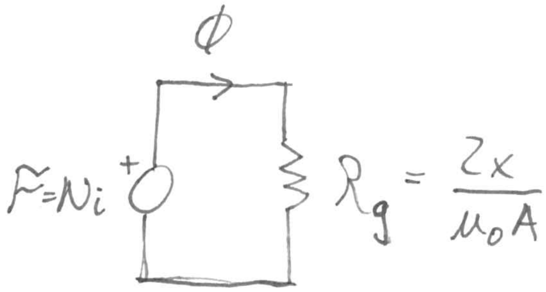
Elektromekaniska omvandlingsprinciper

Kraft- och momentproblem

Fig 1.





För en given ström i, hur stor är kraften $f_{fld}(x)$?

- Vi betraktar endast magnetiskt linjära system, där:

$$\lambda = L(x)\, i \quad , \quad \text{samt} \quad W_{fld} = \frac{1}{2} L i^2$$

magn. energin i kretsen.

- Observera att induktansen L beror av läget x

$$L(x) = \frac{\lambda(x)}{i} = \left/ \begin{matrix} \lambda = N \cdot \phi \\ Ni = \phi \cdot R_g \end{matrix} \right/ = \frac{N^2 \phi}{\phi R_g} = \frac{N^2 \mu_0 A}{2x}$$

Effektbalans

$$\begin{pmatrix} \text{Mekanisk} \\ \text{effekt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Elektrisk} \\ \text{ineffekt} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Ökning av} \\ \text{magnetisk energi} \end{pmatrix} - \cancel{\begin{pmatrix} \text{förlusteffekter} \end{pmatrix}}$$

Fortsättningsvis bortser vi från förluster

Mekanisk effekt för förlustfri elektromekanisk omvandling

$$\frac{dW_{mech}}{dt} = P_{elec} - \frac{dW_{fld}}{dt} = \left/ \begin{matrix} P_{elec} = e \cdot i \\ W_{fld} = \frac{1}{2} L i^2 \end{matrix} \right/ =$$

$$= e \cdot i - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right) = \left/ e = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) \right/ =$$

$$= i \cdot \frac{d}{dt}(Li) - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right) = \left/ \begin{matrix} \text{obs! } L(x(t)) \\ \text{beror av tiden} \end{matrix} \right/ =$$

$$= i \cdot \left(\frac{dL}{dt} \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{dL}{dt} \cdot i^2 + L \cdot 2 \cdot i \cdot \frac{di}{dt}\right)$$

$$= \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dt} \qquad (1)$$

Kraft vid rätlinjig rörelse

$$\frac{dW_{mech}}{dt} = \frac{dW_{mech}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f_{fld} \cdot \frac{dx}{dt} \qquad (2)$$

$$(1)+(2): \quad f_{fld} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{f_{fld} = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dx}}$$

Generellt: Energin $W_{fld}(\lambda, x)$ tillståndsfunktion av λ & x

Kraften $f_{fld} = \left.\frac{\partial W_{fld}}{dx}\right|_{\lambda}$ (λ - hålls konstant vid derivering)

Co-energin $W'_{fld}(i, x) = \lambda \cdot i - W_{fld}(\lambda, x)$ tillståndsfunktion av i, x

Kraften $f_{fld} = \left.\frac{\partial W'_{fld}}{dx}\right|_{i}$ (i - hålls konstant vid derivering)

Ex 1 Betrakta fig 1 och låt

$i = 1$ A , $N = 10^3$ varv , $A = 1\,cm^2 = 10^{-4}\,m^2$ och

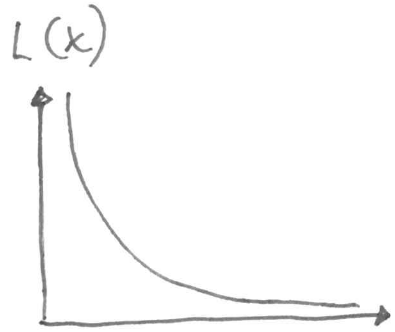
$x = 0{,}1\,mm = 10^{-4}\,m$

Sökt: f_{fld}

$$f_{fld} = \frac{i^2}{2}\frac{dL}{dx} = \frac{i^2}{2}\frac{d}{dx}\frac{N^2\mu_0 A}{2x} = -\frac{i^2 N^2 \mu_0 A}{4} = \frac{1}{x^2} =$$

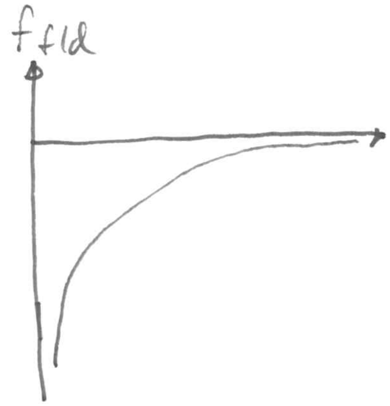
$$= \frac{(10^3)^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-4}}{4 \cdot (10^{-4})^2} = -\pi \cdot 10^3 \ N = -\pi \ kN$$

- Minustecknet betyder att kraften verkar för att minska avståndet x

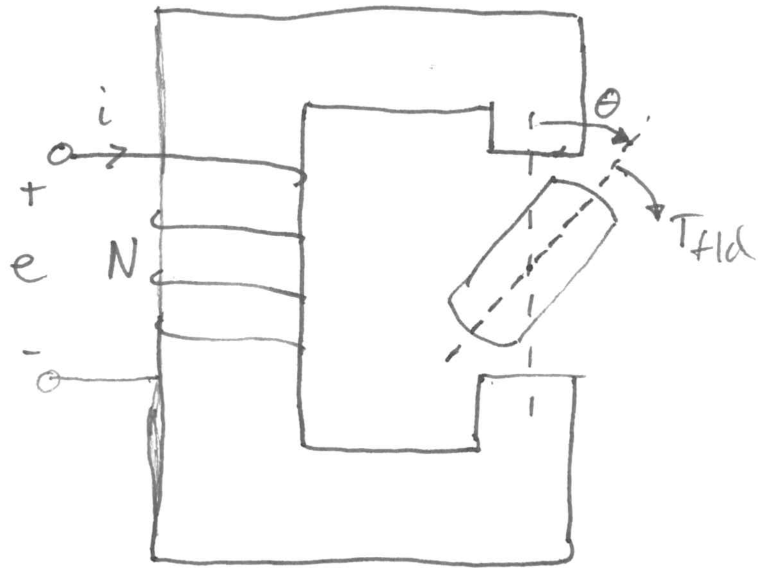


Rörelse så att:

- L maximeras
- R minimeras
- $\mathcal{R}(\phi)$ maximeras
- magn. lättaste vägen



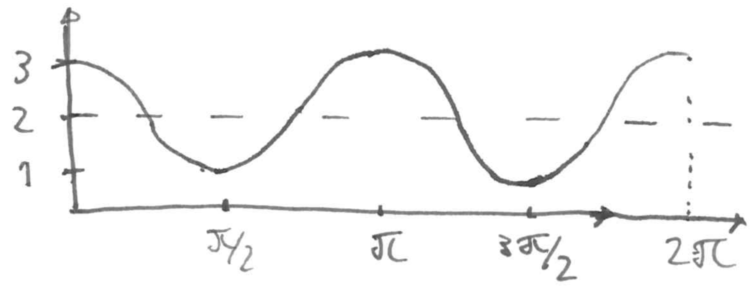
Mekaniskt moment för roterande rörelse



För en given ström i, hur stort är momentet $T_{fld}(\theta)$?

Induktansen beror av vinkeln θ, låt säga

$$L(\theta) = (3 + \cos 2\theta) \cdot 10^{-3} \quad H$$



Notera:

- Stor induktans då luftgapet litet
- Periodtiden π

$$\frac{dW_{mech}}{dt} = \frac{dW_{mech}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = T_{fld} \cdot \frac{d\theta}{dt} \qquad (3)$$

(1) + (3): $T_{fld} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dt} = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$

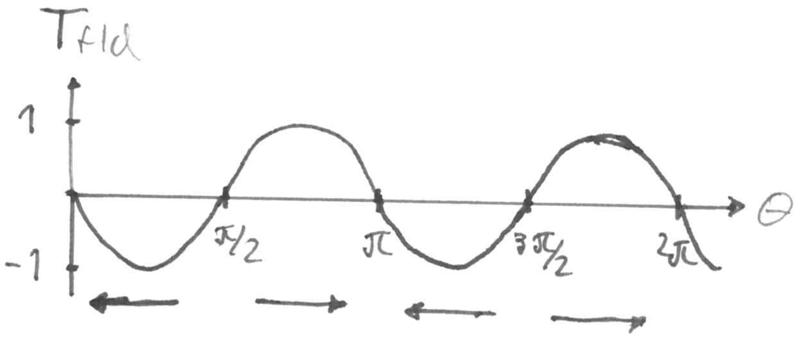
$$\Rightarrow \boxed{T_{fld} = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{d\theta}}$$

Ex 2: Betrakta fig 2 och låt $i = 1A$

Sökt: Momentet $T_{fld}(\theta)$

$$T_{fld} = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{d\theta} = \frac{i^2}{2} \frac{d}{d\theta} (3 + \cos 2\theta) \cdot 10^{-3} =$$

$$= -\frac{i^2}{2} \sin 2\theta \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 10^{-3} \sin 2\theta \text{ Nm} = \sin 2\theta \text{ mNm}$$

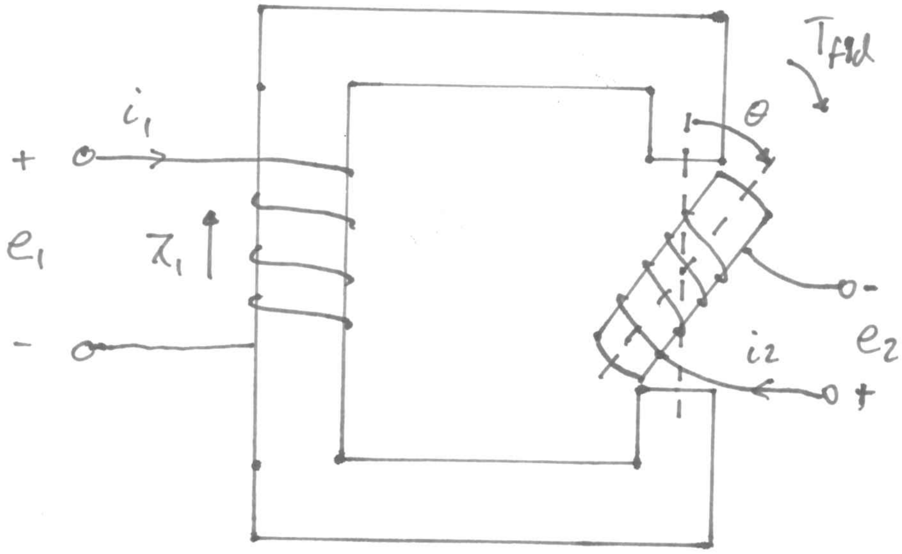


- Jämnviktspunkter, $T_{fld} = 0$: $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$
- Stabila jämnviktspunkter: $\theta = 0, \pi$ (rotor längs luftgap) rörelse minskar L
- Instabila jämnviktspunkter: $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (rotor tvärs luftgap) rörelse ökar L

(Demo)

Multiexciterade system

Fig 3.



För givna strömmar i_1 och i_2, hur stort är momentet $T_{fld}(\theta)$?

Sammanlänkade flöden

$$\lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2$$

$$\lambda_2 = L_{12} i_2 + L_{22} i_2$$

$L_{i,j}(\theta)$ - beror av vinkeln θ (4)

Effektbalans

$$\frac{dW_{mech}}{dt} = P_{elec} - \frac{dW_{fld}}{dt} \qquad (5)$$

Elektrisk effekt

$$P_{elec} = e_1 i_1 + e_2 i_2 = \left| e_i = \frac{d\lambda_i}{dt} \right| = i_1 \frac{d\lambda_1}{dt} + i_2 \frac{d\lambda_2}{dt} \overset{(4)}{=}$$

$$= i_1 \frac{d}{dt}(L_{11} i_1 + L_{12} i_2) + i_2 \frac{d}{dt}(L_{12} i_1 + L_{22} i_2) = \ldots \qquad (6)$$

Magnetisk energi

$$\boxed{W_{fld} = \frac{L_{11} i_1^2}{2} + \frac{L_{22} i_2^2}{2} + L_{12} i_1 i_2}$$

$$\frac{dW_{fld}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{L_{11} i_1^2}{2} + \frac{L_{22} i_2^2}{2} + L_{12} i_1 i_2\right) = \ldots \qquad (7)$$

Substitution med (6) och (7) i (5) ger efter förenkling:

$$\frac{dW_{mech}}{dt} = \frac{i_1^2}{2}\frac{dL_{11}}{dt} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{dt} + \frac{i_2^2}{2}\frac{dL_{22}}{dt} \qquad (8)$$

Momentet

(3)+(8):

$$T_{fld}\frac{d\theta}{dt} = \frac{i_1^2}{2}\frac{dL_{11}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \frac{i_2^2}{2}\frac{dL_{22}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{fld} = \frac{i_1^2}{2}\cdot\frac{dL_{11}}{d\theta} + \frac{i_2^2}{2}\cdot\frac{dL_{22}}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta}} \qquad (9)$$

Kraften vid rätlinjig rörelse blir analogt

$$\boxed{f_{fld} = \frac{i_1^2}{2}\frac{dL_{11}}{dx} + \frac{i_2^2}{2}\frac{dL_{22}}{dx} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{dx}}$$

Ex 3. Forts på ex 2. Betrakta fig 3 och låt

$L_{11} = (3 + \cos 2\theta) \cdot 10^{-3}$ H

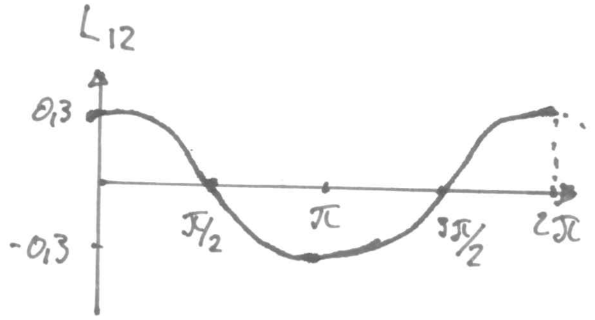
$L_{12} = 0{,}3 \cos \theta$ H

$L_{22} = 30 + 10 \cos 2\theta$ H

$i_1 = 1$ A

$i_2 = 10^{-2}$ A

Sökt $T_{fld}(\theta)$



Notera:

- Periodtid 2π
- Negativ då rotorns och statorns fält motriktade dvs då $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

Momentet blir:

$$(9): \quad T_{fld} = \frac{i_1^2}{2} \frac{d}{d\theta} (3 + \cos 2\theta) \cdot 10^{-3} + \frac{i_2^2}{2} \frac{d}{d\theta} (30 + 10 \cos 2\theta) +$$

$$i_1 i_2 \frac{d}{d\theta} (0{,}3 \cos \theta) =$$

$$= -\frac{i_1^2}{2} \sin(2\theta) \cdot 10^{-3} \cdot 2 - \frac{i_2^2}{2} \cdot 10 \sin(2\theta) \cdot 2 - i_1 i_2 \, 0{,}3 \sin \theta =$$

$$= \underbrace{-2 \sin 2\theta}_{\text{reluktansmoment}} \underbrace{- 3 \sin \theta}_{\text{Moment från interaktion mellan statorns och rotorns fält.}} \quad \text{mNm}$$

Se fig OH.