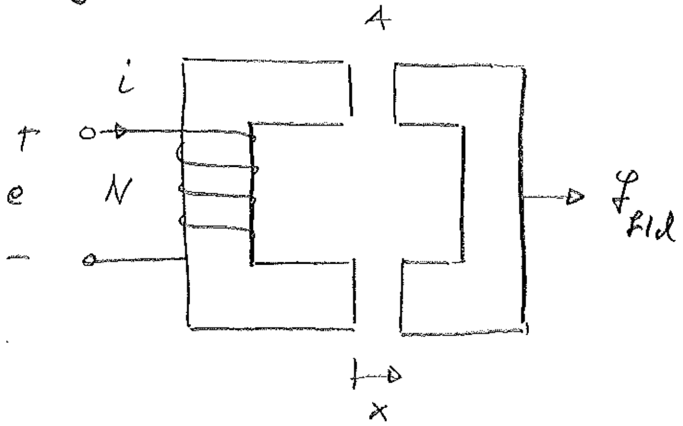
Fö3 Elektromekaniska omvandlingsprinciper

Kraft- och momentproblem

Fig 1:



För en given ström i, hur stor är kraften $f_{fld}(x)$?

- vi betraktar endast magnetiskt linjära system, dvs

$$\lambda = L(x)\, i$$

gäller.

- Observera att induktansen L beror av läget x:

$$L(x) = \frac{N^2}{R_g} = \frac{N^2 \mu_0 A}{2x}$$

Effektbalans

$$\begin{pmatrix}\text{mekaniska kraftens} \\ \text{arbete/tidsenhet}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{elektrisk} \\ \text{ineffekt}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{ökning av} \\ \text{upplagrad} \\ \text{magn. fältenergi/t.e}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{förlusteffekt}\end{pmatrix}$$

Förutsättning: vi bortser från förluster

Mekanisk effekt för förlustfri elektromekanisk omvandling

$$\frac{dW_{mech}}{dt} = P_{elec} - \frac{dW_{fld}}{dt} = \left/ \begin{array}{l} P_{elec} = e \cdot i \\ W_{fld} = \frac{1}{2} L i^2 \end{array} \right/ =$$

$$= e \cdot i - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right) = \left/ e = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) \right/ =$$

$$= i \frac{d}{dt}(Li) - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right) = \left/ \begin{array}{l} \text{Obs! } L(x(t)) \\ \text{beror av tiden.} \end{array} \right/ =$$

$$= i\left(\frac{dL}{dt} \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{dL}{dt} \cdot i^2 + L \cdot 2 \cdot i \cdot \frac{di}{dt}\right) =$$

$$= \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dt} \qquad (1)$$

Kraft vid rätlinjig rörelse

$$\frac{dW_{mech}}{dt} = \left.\frac{\partial W_{mech}}{\partial x}\right|_i \cdot \frac{dx}{dt} = f_{fld} \cdot \frac{dx}{dt} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f_{fld} = \left.\frac{\partial W_{mech}}{\partial x}\right|_i}$$

i hålls konstant vid differentieringen!

$$(1)+(2): \quad f_{fld} \cdot \cancel{\frac{dx}{dt}} = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dx} \cancel{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow$$

$$\boxed{f_{fld} = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dx}}$$

Ex 1: Betrakta fig 1 och låt

$i = 1\,A$, $N = 10^3$ varv, $A = 1\,cm^2 = 10^{-4}\,m^2$ och

$x = 0.1\,mm = 10^{-4}\,m$.

Sökt: f_{fld}

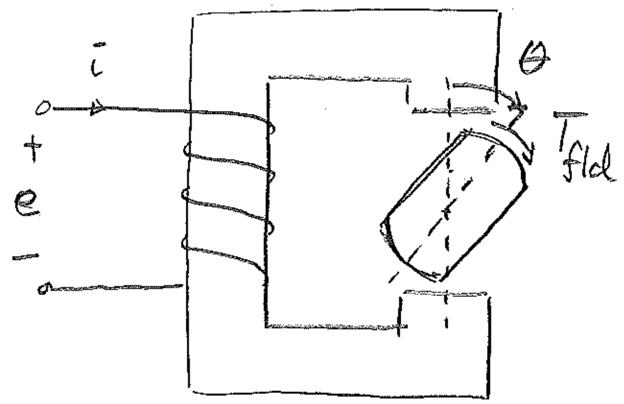
$$f_{fld} = \frac{i^2}{2}\frac{dL}{dx} = \frac{i^2}{2}\frac{d}{dx}\frac{N^2\mu_0 A}{2x} = -\frac{i^2N^2\mu_0 A}{4}\frac{1}{x^2} =$$

$$= -\frac{(10^3)^2\cdot 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^{-4}}{4\cdot(10^{-4})^2} = -\pi\cdot 10^3\,N = -\pi\,kN$$

- Minustecknet betyder att kraften verkar för att minska avståndet x.

Mekaniskt moment för roterande rörelse

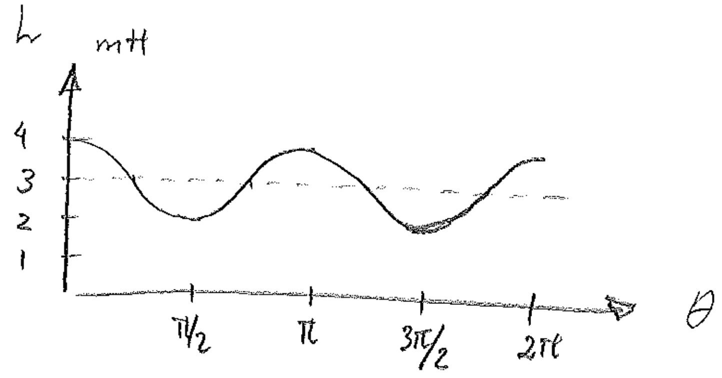
Fig 2:



För en given ström i, hur stort är momentet $T_{fld}(\theta)$?

Iduktansen beror av vinkeln θ, låt säga

$$L(\theta) = (3 + \cos 2\theta) \cdot 10^{-3} \text{ H}$$



Notera:

- Stor induktans då luftgap litet
- Periodtid π

$$\frac{dW_{mech}}{dt} = \left.\frac{\partial W_{mech}}{\partial \theta}\right|_i \cdot \frac{d\theta}{dt} = T_{fld} \cdot \frac{d\theta}{dt} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{fld} = \left.\frac{\partial W_{mech}}{\partial \theta}\right|_i}$$

i hålls konstant vid differentieringen.

(1) + (3) : $T_{fld} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$

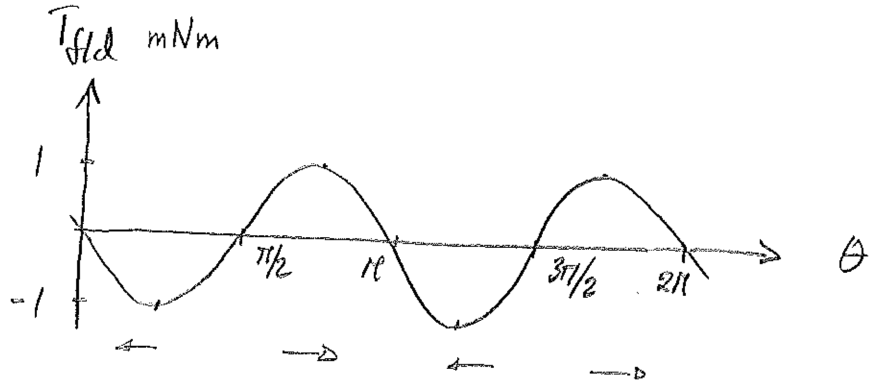
$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{fld} = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{d\theta}}$$

Ex 2: Betrakta fig. 1 och låt $i = 1\,A$.

Sökt: Momentet: $T_{fld}(\theta)$

$$T_{fld} = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{d\theta} = \frac{i^2}{2} \frac{d}{d\theta} (3 + \cos 2\theta) \cdot 10^{-3} =$$

$$= -\frac{i^2}{2} \sin 2\theta \cdot 10^{-3} \cdot 2 = -\sin 2\theta \text{ mNm}$$

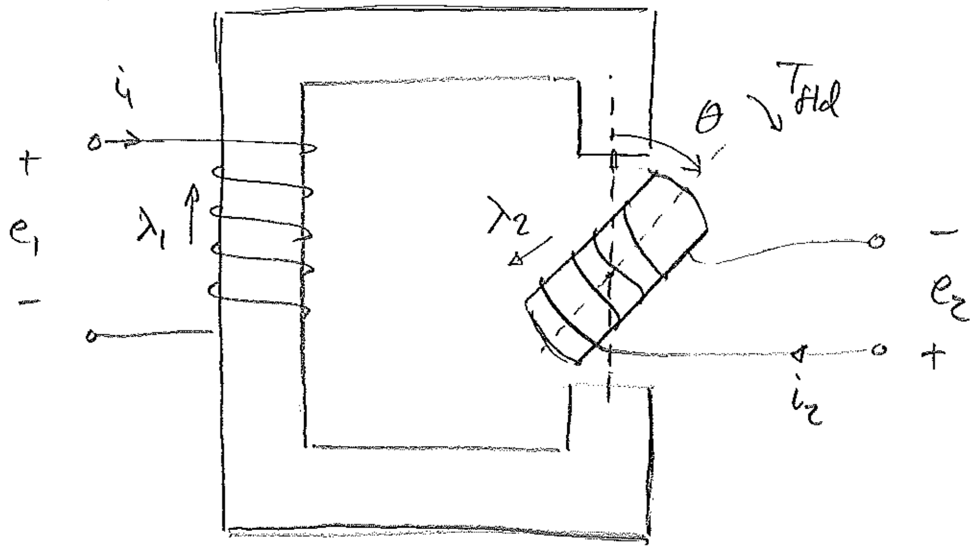


- Jämviktspunkter $T_{fld} = 0$: $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$
- Stabila jämviktspunkter: $\theta = 0, \pi$ (rotor längs luftgap)
- Instabila jämviktspunkter: $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (rotor tvärs luftgap)

(Demo)

Multiexciterade system

Fig. 3



För givna strömmar i_1 och i_2, hur stort är momentet $T_{fld}(\theta)$?

Sammanlänkade flöden

$$\lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2$$
$$\lambda_2 = L_{12} i_1 + L_{22} i_2$$

$L_{ij}(\theta)$ – beror av θ. (4)

Effektbalans

$$\frac{dW_{mech}}{dt} = P_{elec} - \frac{dW_{fld}}{dt} \qquad (5)$$

Elektrisk effekt

$$P_{elec} = e_1 i_1 + e_2 i_2 = \left/ e_i = \frac{d\lambda_i}{dt} \right/ = i_1 \frac{d\lambda_1}{dt} + i_2 \frac{d\lambda_2}{dt} \overset{(4)}{\underset{=}{\downarrow}}$$

$$= i_1 \frac{d}{dt}\left(L_{11} i_1 + L_{12} i_2\right) + i_2 \frac{d}{dt}\left(L_{12} i_1 + L_{22} i_2\right) = \ldots \qquad (6)$$

Magnetisk energi

$$\boxed{W_{fld} = \frac{L_{11} i_1^2}{2} + \frac{L_{22} i_2^2}{2} + L_{12} i_1 i_2}$$

$$\frac{dW_{fld}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{L_{11} i_1^2}{2} + \frac{L_{22} i_2^2}{2} + L_{12} i_1 i_2 \right) = \cdots \qquad (7)$$

Substitution med (6) och (7) i (5) ger efter förenkling

$$\frac{dW_{mech}}{\cancel{dt}} = \frac{i_1^2}{2} \frac{dL_{11}}{\cancel{dt}} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{\cancel{dt}} + \frac{i_2^2}{2} \frac{dL_{22}}{\cancel{dt}}$$

Momentet

$$T_{fld} = \left.\frac{\partial W_{mech}}{\partial \theta}\right|_{i} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{i_1^2}{2} dL_{11} + i_1 i_2 dL_{12} + \frac{i_2^2}{2} dL_{22} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_{fld} = \frac{i_1^2}{2} \frac{dL_{11}}{d\theta} + \frac{i_2^2}{2} \frac{dL_{22}}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta}} \qquad (8)$$

Kraften f_{fld} vid rätlinjig rörelse blir analogt:

$$\boxed{f_{fld} = \frac{i_1^2}{2} \frac{dL_{11}}{dx} + \frac{i_2^2}{2} \frac{dL_{22}}{dx} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{dx}}$$

Ex 3. Forts. på ex 2. Betrakta fig 3 och låt

$$L_{11} = (3 + \cos 2\theta) \cdot 10^{-3} \; H$$

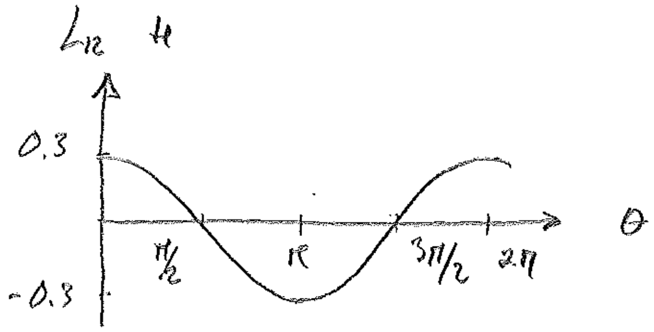
$$L_{12} = 0.3 \cos\theta \quad H$$

$$L_{22} = 30 + 10 \cos 2\theta \; H$$

$$i_1 = 1 A$$

$$i_2 = 10^{-2} A$$

Sökt: $T_{fld}(\theta)$



Notera

- Periodtid = 2π
- Negativ då rotorns och statorns fält motriktade, dvs då $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$(\lambda_1 = L_{12} i_2)$

Momentet blir:

$$(8): \quad T_{fld} = \frac{i_1^2}{2}\frac{d}{d\theta}\left(3+\cos 2\theta\right)\cdot 10^{-3} + \frac{i_2^2}{2}\frac{d}{d\theta}\left(30+10\cos 2\theta\right) +$$

$$i_1 i_2 \frac{d}{d\theta}\left(0.3\cos\theta\right) =$$

$$= -\frac{i_1^2}{2}\sin 2\theta\cdot 10^{-3}\cdot 2 - \frac{i_2^2}{2}\cdot 10\sin 2\theta\cdot 2 - i_1 i_2\, 0.3\sin\theta =$$

$$= -10^{-3}\sin 2\theta - 10^{-3}\sin 2\theta - 3\cdot 10^{-3}\sin\theta =$$

$$= \underbrace{-2\sin 2\theta}_{\text{reluktansmoment}} \underbrace{-3\sin\theta}_{\text{moment från interaktion mellan statorns och rotorns fält.}} \text{ mNm}$$