TSFS06 Diagnos och övervakning
Föreläsning 4 - Linjär residualgenerering och detekterbarhet

Erik Frisk

Institutionen för systemteknik
Linköpings universitet
erik.frisk@liu.se

2020-04-08

Översikt

Linjär residualgenerering

Definition

Ett propert linjärt filter $R(p)$ är en residualgenerator för observationsmängden $\mathcal{O}$ och $r = R(p)z$ en residual om

$$z \in \mathcal{O} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} r(t) = 0$$

- En residualgenerator är inte nödvändigtvis känslig för fel.
- $r = 0$ är alltid en residualgenerator, men en smula värdelös.
- Metod för att hitta alla, sedan kan man välja bland dem de som har bäst prestanda, med avseende på till exempel detekterbarhetsprestanda.

Linjär residualgenerering

Förra föreläsningen visades att för en modell

$$H(p)x + L(p)z + F(p)f = 0$$

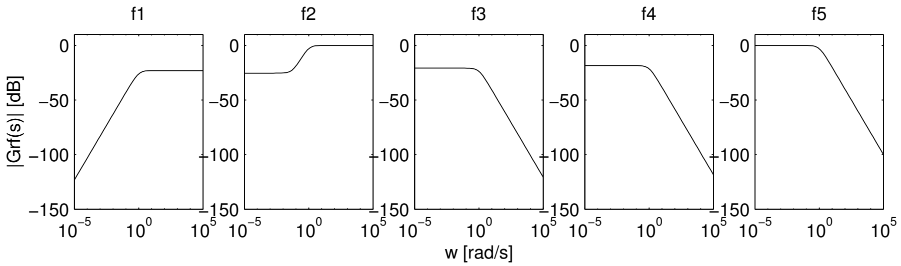
så kan alla residualgeneratorer skrivas $r = R(p)z$ där

$$R(p) = d^{-1}(p)\gamma(p)N_H(p)L(p)$$

- designfrihet i $d(p)$ och $\gamma(p)$.
- $d(s)$ stabil och med gradtal större eller lika med täljarens $\gamma(s)N_H(s)L(s)$ gradtal.

Prestandaexempel från förra föreläsningen

Nedan visas överföringsfunktionen från fel till residual för det avslutande exemplet i förra föreläsningen



Överföringsfunktion från fel till residual

För modellen

$$H(p)x + L(p)z + F(p)f = 0$$

så har residualgeneratorn

$$R(p) = \frac{1}{d(p)}\gamma N_H(p)L(p)z$$

överföringsfunktionen

$$G_{rf}(s) = -\frac{1}{d(s)}\gamma N_H(s)F(s)$$

från fel till residual.

Hur kan man forma $G_{rf}(s)$ via $d(s)$ och γ? Vad är möjligt?

Översikt

- *Linjär residualgenerering*
- *Frihetsgrader/redundans*
- *Detekterbarhet*
  - Formell definition
  - Avgöra detekterbarhet
- *Isolerbarhet*
  - Formell definition
  - Omskrivning till ett detekterbarhetsproblem
- *Designparametrar $d(s)$ och $\gamma(s)$*
- *Stark detekterbarhet*
- *Begränsningar och design*

Frihetsgrader

En fråga: Hur många linjärt oberoende residualgeneratorer finns det? (grad av redundans i modellen)

$$y_1 = x \qquad y_2 = x$$
$$y_3 = x \qquad y_4 = x$$

Här kan alla parvis jämförelser (6 st) skapa en residual

$$r = y_i - y_j$$

men modellen har redundans 3. Alla residualer kan skrivas som linjärkombination av

$$r_1 = y_1 - y_2$$
$$r_2 = y_2 - y_3$$
$$r_3 = y_3 - y_4$$

dvs.

$$r = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2 + \gamma_3 r_3$$

Frihetsgrader

En fråga: Hur många linjärt oberoende residualgeneratorer finns det? (grad av redundans i modellen)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + u\\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2\\ y_1 &= x_1\\ y_2 &= x_2\end{aligned}$$

Genom direkt insättning får vi exempelvis

$$\begin{aligned}e_1 :& \dot{y}_1 + y_1 - u = 0\\ e_2 :& \dot{y}_2 + y_2 - y_1 = 0\end{aligned}$$

Vi kan också få

$$e_3 : \ddot{y}_2 + 2\dot{y}_2 + y_2 - u = 0$$

Den tredje fås genom $e_3 = (p+1)e_2 + e_1$

Frihetsgrader

En fråga: Hur många linjärt oberoende residualgeneratorer finns det? (grad av redundans i modellen)

Då alla residualgeneratorer kan skrivas

$$R(s) = \frac{1}{d(s)}\gamma(s)N_H(s)L(s)$$

så ser man att rummet av residualgeneratorer spänns upp av

$$N_H(s)L(s)$$

dvs. dimensionen ges av antalet oberoende rader i $N_H(s)$ som enligt dimensionssatsen ges av

$$\begin{aligned}n_r =& \text{ rader i } H(s) - \mathrm{Rank}\, H(s) =\\ &= \#\text{ ekvationer} - \#\text{ oberoende obekanta.}\end{aligned}$$

För en tillståndsmodell blir detta $n_r = n_y - n_d$.

$$n_r = n_y - n_d = \#\text{ givare} - \#\text{ oberoende störningar.}$$

Hur många signaler kan avkopplas i residualen

- Hur många signaler kan vi avkoppla i en residual?
- Samma fråga är: hur många nollor kan vi införa i en rad i residualstrukturen

	f_1	f_2	f_3
r_1	X	0	X

Svaret är att $n_r > 0$, dvs.

$$\text{rader i } H(s) > \mathrm{Rank}\, H(s)$$

vilket är ganska naturligt. Antalet ekvationer måste vara större än antalet signaler vi vill avkoppla.

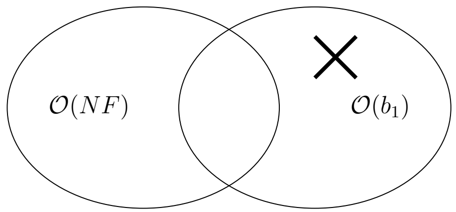
Översikt

Detekterbarhet

Detekterbarhet

Mod b_i (svarande mot felsignal f_i) är detekterbar i en modell om

$$\mathcal{O}(b_i) \not\subseteq \mathcal{O}(NF)$$



Här är mod b_1 detekterbar

- Detekterbarhet i stokastiska modeller ej samma sak.
- Detekterbarhet en modellegenskap. Är observationerna, då $f \neq 0$, möjliga att skilja från fallet då $f = 0$?

Felkänslighet i en residual

För en modell och residualgenerator

$$H(p)x + L(p)z + F(p)f = 0$$

Felkänslighet

En residual från en residualgenerator $R(p)$ är känslig för fel i om $G_{rf_i}(s) \neq 0$, dvs. om

$$G_{rf}(s) = -\frac{1}{d(s)}\gamma N_H(s)F_i(s) \neq 0$$

- Skilj på detekterbarhet och känslighet för ett fel i en specifik residual.
- Testa ett fel i taget!

Teorem

Ett fel är detekterbart om och endast om det existerar en residual känslig för felet.

Skillnad mellan detekterbarhet och felkänslighet

I systemet

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{p+2} \end{bmatrix} u + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

är båda felen detekterbara. För residualgeneratorn

$$r = y_1 - \frac{1}{p+1}u = f_1$$

så gäller att

$$G_{rf_1}(s) = 1, \quad G_{rf_2}(s) = 0$$

$\Rightarrow$ Det går och konstruera residualer så alla detekterbara fel kan detekteras med någon residual.

$\Leftarrow$ Vi kan visa detekterbarhet av ett fel genom att konstruera en residual som är känsligt för det felet.

Hur avgör man om ett fel är detekterbart?

För att illustrera den enkla principen, betrakta tillståndsformen

$$\begin{aligned} \dot{w} &= Aw + Bu + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} f \\ y &= w \end{aligned}$$

Eftersom alla tillstånd mäts så är felet detekterbart om det går att särskilja från störningen d

$$\mathrm{Im} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \not\subseteq \mathrm{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \qquad \mathrm{Rank} \begin{bmatrix} 1 & c_1 \\ 2 & c_2 \end{bmatrix} > \mathrm{Rank} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Naturligt: felet är detekterbart om $c_2 \neq 2c_1$.

Ett fel är detekterbart om dess påverkan på systemet kan särskiljas från inverkan av okända signaler

Generellt detekterbarhetstest

Betrakta endast fel i, dvs. modellekvationen är

$$H(p)x + L(p)z + F_i(p)f_i = 0$$

där $[H(s)\; L(s)]$ har full radrang för alla $s \in \mathbb{C}$. Detta är inte uppfyllt om felmodeller används som t ex $\dot{f}_i = 0$.

På samma sätt som i exemplet är f_i detekterbart om f_i kan särskiljas från x, dvs.

Teorem

Mod b_i är detekterbar om

$$\mathrm{Im}\, F_i(s) \not\subseteq \mathrm{Im}\, H(s)$$

eller ekvivalenta uttryck som är mer lämpliga att använda som test i Matlab

$$\mathrm{Rank}\,[H(s)\;\; F_i(s)] > \mathrm{Rank}\, H(s) \Leftrightarrow N_H(s)F_i(s) \neq 0$$

Vad betyder detekterbarhetsvillkoret

Antag ett icke detekterbart fel, dvs. $\mathcal{O}(b_i) \subseteq \mathcal{O}(NF)$, dvs. det gäller att

$$\mathrm{Im}\, F_i(s) \subseteq \mathrm{Im}\, H(s)$$

Detta betyder att det existerar en matris $\xi(s)$ så att

$$F_i(s) = H(s)\xi(s)$$

Det betyder att modellen, under b_i, kan skrivas enligt

$$\begin{aligned} 0 &= H(p)x(t) + L(p)z(t) + F_i(p)f_i(t) = \\ &= H(p)x(t) + L(p)z(t) + H(p)\xi(p)f_i(t) \end{aligned}$$

Vid elimination av x, genom multiplikation från vänster med $N_H(p)$ elimineras även f_i:

$$0 = \underbrace{N_H(p)H(p)}_{=0} x(t) + N_H(p)L(p)z(t) + \underbrace{N_H(p)H(p)}_{=0} \xi(p)f_i(t)$$

Översikt

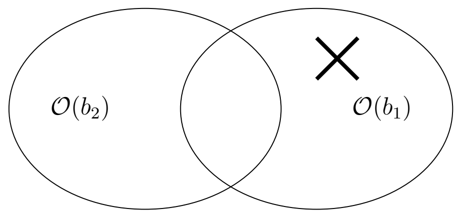
- *Linjär residualgenerering*
- *Frihetsgrader/redundans*
- *Detekterbarhet*
  - Formell definition
  - Avgöra detekterbarhet
- *Isolerbarhet*
  - Formell definition
  - Omskrivning till ett detekterbarhetsproblem
- *Designparametrar $d(s)$ och $\gamma(s)$*
- *Stark detekterbarhet*
- *Begränsningar och design*

Formell definition av isolerbarhet

Isolerbarhet

Mod b_i är isolerbar från mod b_j i en modell om

$$\mathcal{O}(b_i) \not\subseteq \mathcal{O}(b_j)$$



Här är mod b_1 isolerbar från mod b_2.

- Samma typ av villkor som detekterbarhet
- Går att skriva om isolerbarhetskravet som ett detekterbarhetskrav och använda samma villkor som för detekterbarhet

Isolerbarhet som ett detekterbarhetsproblem

Från föreläsning 2 vet vi att

$$\mathcal{O}(b_1) \not\subseteq \mathcal{O}(b_2) \Leftrightarrow \text{detektera } f_1 \text{ oavsett värdet på } f_2$$

Skriv om modellen (med f_1 och f_2)

$$0 = H(p)x + L(p)z + F_1(p)f_1 + F_2(p)f_2 = [H(p)\ F_2(p)] \begin{pmatrix} x \\ f_2 \end{pmatrix} + L(p)z + F_1(p)f_1$$

Nu kan vi använda detekterbarhetskriteriet för en ny modell med ny H-matris

$$\begin{pmatrix} H(p) & F_2(p) \end{pmatrix}$$

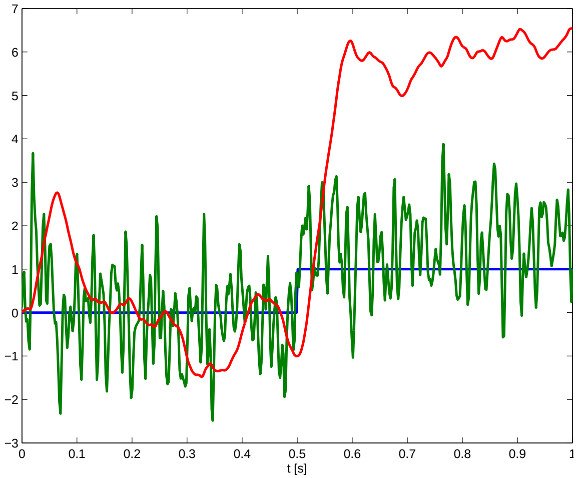
Mod b_1 isolerbar från mod b_2 om

$$\operatorname{Im} F_1(s) \not\subseteq \operatorname{Im}[H(s)\ F_2(s)] \Leftrightarrow$$
$$\operatorname{Rank}[H(s)\ F_1(s)\ F_2(s)] > \operatorname{Rank}[H(s)\ F_2(s)]$$

Översikt

- *Linjär residualgenerering*
- *Frihetsgrader/redundans*
- *Detekterbarhet*
  - Formell definition
  - Avgöra detekterbarhet
- *Isolerbarhet*
  - Formell definition
  - Omskrivning till ett detekterbarhetsproblem
- *Designparametrar $d(s)$ och $\gamma(s)$*
- *Stark detekterbarhet*
- *Begränsningar och design*

Lågpassverkan i residualen



Är fel/brus-förhållandet för dåligt i en residual? Lågpassfiltrera hårdare.
Säkrare detektion till priset av längre detektionstid!

Val av $\gamma(s)$ och $d(s)$, generellt

$$R(s) = d^{-1}(s)\gamma(s)N_H(s)L(s)$$

Det skalära polynomet $d(p)$ ger lämplig, tex. låg-pass, karakteristik hos residualgeneratorn

Antag mätbrus, dvs. mätsignalen och residualgenerator ges av

$$r = R(p)z = \frac{a(p)y + b(p)u}{d(p)}, \quad y = y_0 + \epsilon$$

då blir residualen i felfritt fall

$$r = \frac{a(p)}{d(p)}\epsilon$$

Val av $\gamma(s)$ och $d(s)$, generellt

Känslighetsresultatet säger att om alla felen är detekterbara så existerar ett $\gamma(s)$ så att

$$G_{rf_i}(s) = d^{-1}(s)\gamma(s)N_H(s)F_i(s) \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n_f$$

dvs. γ kan väljas genom att bilda $N_H(s)F(s)$ och se till att γ väljs så att alla element i $\gamma N_H(s)F(s)$ är skilda ifrån 0.

- $\gamma(s)$ kan alltid väljas konstant (och det finns i regel ingen anledning att göra något annat).
- Det hela handlar om att forma överföringsfunktionerna från fel, brus, modellfel etc. till residual.

Designvariabel γ

För flygmodellen från förra föreläsningen avkopplade vi fel f_6 och fick följande felkänslighet:

$$N_H(s)F(s) = \begin{bmatrix} 0.0705s & s + 0.0538 & 0.091394 & 0.12 & -1 & 0 \\ 22.7459s^2 + 14.5884s & -6.6653 & s^2 - 0.93678s - 16.5141 & 31.4058 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimensionen är 2 och det finns exakt två linjärt oberoende residualgeneratorer.

Välj γ i $\gamma N_H(s)F(s)$ så att residualen blir känslig för de ej avkopplade felen, dvs för $f_1, \ldots, f_5$. För att göra residualen känslig för fel f_5 måste rad 1 användas, dvs om $\gamma = [\gamma_1 \ \gamma_2]$ så måste $\gamma_1 \neq 0$.

Designvariabel $d(s)$

För att välja till exempel första raden i basen, välj $\gamma = [1 \ 0]$:

$$\gamma(p)N_H(p)L(p) = [0.0705p \quad p + 0.0538 \quad 0.091394 \quad 0.12 \quad -1 \quad 0]$$

Följande räkningar illustrerades redan förra föreläsningen. En realiserbar residualgenerator är då till exempel:

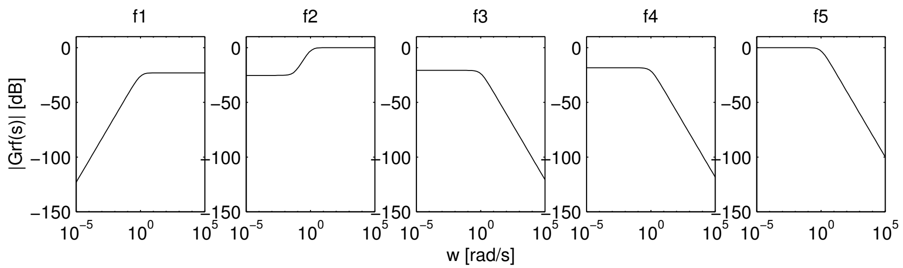
$$R(s) = \frac{1}{1+s}\begin{bmatrix} 0.0705s & s + 0.0538 & 0.091394 & 0.12 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

En tillståndsbeskrivning av residualgeneratorn kan visas vara

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -w + \begin{bmatrix} -0.0705 & -0.9462 & 0.0914 & 0.12 & -1 & 0 \end{bmatrix} z \\ r &= w + \begin{bmatrix} 0.0705 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z \end{aligned}$$

vilket är enkelt att implementera i en dator.

Detekterbarhetsutvärdering i en bode-plot



Flera fel $\Rightarrow$ avvägning i varje residual vilken/vilka man ska prioritera. Optimering.

Översikt

- Linjär residualgenerering
- Frihetsgrader/redundans
- Detekterbarhet
  - Formell definition
  - Avgöra detekterbarhet
- Isolerbarhet
  - Formell definition
  - Omskrivning till ett detekterbarhetsproblem
- Designparametrar $d(s)$ och $\gamma(s)$
- Stark detekterbarhet
- Begränsningar och design

Detekterbarhetsexempel

Antag ett roterande system som beskrivs av ekvationerna nedan och man mäter vinkeln φ med ett additivt sensorfel f.

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\mu\omega + u \\ y &= \varphi + f\end{aligned}$$

eller ekvivalent

$$y = \frac{1}{p(p+\mu)}u + f$$

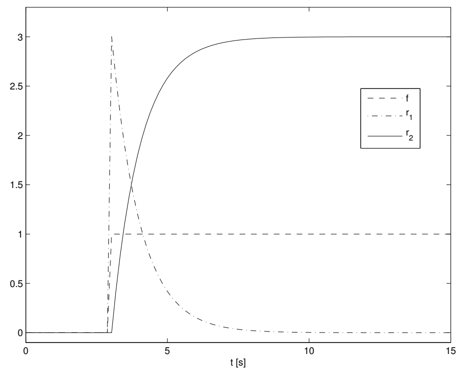
Enkla räkningar ger att alla residualer bygger på sambandet

$$p(p+\mu)y - u = p(p+\mu)f \Leftrightarrow \ddot{y} + \mu\dot{y} - u = \ddot{f} + \mu\dot{f}$$

Illustrerar ett enkelt fall då f är detekterbart men endast reagerar på derivatan av felet.

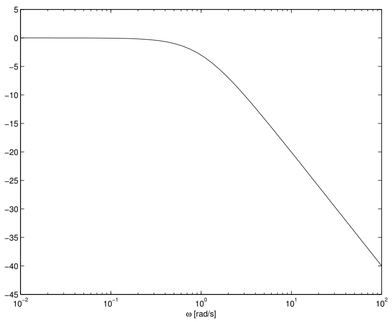
Stark detekterbarhet

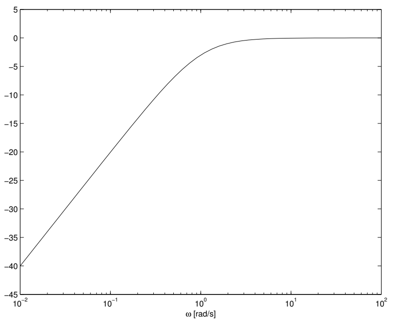
Stark detekterbarhet = hur bra kan vi detektera **konstanta** fel.



Båda residualerna är känsliga för felet, men den ena är uppenbart bättre.

Överföringsfunktioner från fel till residual





Stark detekterbarhet, forts.

$$G_{rf_i}(s) = d^{-1}(s)\gamma(s)N_H(s)F_i(s)$$

Definition (Starkt/svagt detekterbart fel)

Mod b_i är starkt detekterbart om för ett konstant f_i $z \notin \mathcal{O}$.

Ett detekterbart fel som inte är starkt detekterbart är svagt detekterbart.

Definition

Ett fel f_i är starkt detekterbart i en residual r om $G_{rf_i}(s)|_{s=0} \neq 0$.

Teorem

Ett fel f_i är starkt detekterbart om och endast om $N_H(0)F_i(0) \neq 0$.

Teorem

Ett fel är starkt detekterbart om och endast om felet är starkt detekterbart med en residual.

Stark/svag detekterbarhet och isolerbarhet

Åter flygmodellen: avkopplade av fel f_6 gav följande felkänslighet:

$$N_H(s)F(s) = \begin{bmatrix} 0.0705s & s+0.0538 & 0.091394 & -0.12 & 1 & 0 \\ 22.7459s^2+14.5884s & -6.6653 & s^2-0.93678s-16.5141 & -31.4058 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ett fel f_i är starkt detekterbart om och endast om $N_H(0)F_i(0) \neq 0$.

Eftersom $N_H(0)F_1(0) = 0$ så finns går det inte att isolera ett konstant fel f_1 ifrån f_6. (Generalisering av stark detekterbarhet till isolerbarhetsfallet)

Det finns ingen residual, dvs inget val av γ, så att f_6 avkopplas och f_1 är starkt detekterbar med residualen.

Sammanfattning av val av γ

Antag att f_4 har avkopplas och följande felkänslighet har beräknats

$$N_H(s)F(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & s & 0 \\ 1 & s & s & 0 \end{bmatrix}$$

Hur ska $\gamma = \begin{bmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\end{bmatrix}$ väljas?

- Känslig för $f_1 \Rightarrow \gamma_2 \neq 0$.
- Starkt detekterbarhet för $f_2 \Rightarrow \gamma_1 \neq 0$.
- f_3 är svagt detekterbar för alla val av γ.

Exempel på lösning: $\gamma = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$.

Översikt

- Linjär residualgenerering
- Frihetsgrader/redundans
- Detekterbarhet
  - Formell definition
  - Avgöra detekterbarhet
- Isolerbarhet
  - Formell definition
  - Omskrivning till ett detekterbarhetsproblem
- Designparametrar $d(s)$ och $\gamma(s)$
- Stark detekterbarhet
- **Begränsningar och design**

Detekterbarhet och känslighet vid isolering

	f_1	f_2	f_3
r_1	X	0	X

$$\Rightarrow \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \end{pmatrix}, \qquad d = f_2$$

- För att kunna isolera fel från varandra så vill man avkoppla fel i residualen
- Avkoppling påverkar möjligheten att detektera andra fel.
- Ett detekterbart fel kan därmed vara ej detekterbart i en viss given residualstruktur.
- Detta relaterar direkt till modellens isolerbarhetsegenskaper.
- Om b_i ej är isolerbar från b_j så kommer avkoppling av f_j automatiskt avkoppla även fel f_i.
- Isolerbarhetsvillkoren ger direkt villkor på möjliga beslutsstrukturer.

Avkoppling påverkar möjligheten att detektera andra fel

Anta ett andra ordningens system med två insignaler och två utsignaler samt modellerade fel på in/ut-signaler.

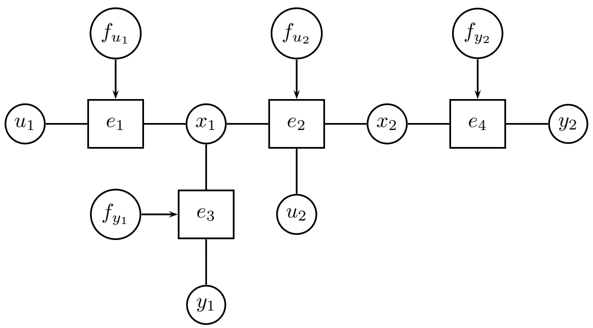
$$\begin{aligned} e_1 &: \dot{x}_1 = -x_1 + u_1 + f_{u_1} \\ e_2 &: \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u_2 + f_{u_2} \\ e_3 &: y_1 = x_1 + f_{y_1} \\ e_4 &: y_2 = x_2 + f_{y_2} \end{aligned}$$

Vilka av nedanstående residualer är möjliga och vilka är det inte?

	f_{u_1}	f_{u_2}	f_{y_1}	f_{y_2}
r_1	0	X	X	X
r_2	X	0	X	X
r_3	X	X	0	X
r_4	X	X	X	0
r_5	0	0	X	X

Går att räkna på men vill man förstå är det nyttigt att rita en figur.

Rita en figur eller analysera strukturen så ser man



	x_1	x_2	
e_1	X		$\leftarrow f_{u_1}$
e_2	X	X	$\leftarrow f_{u_2}$
e_3	X		$\leftarrow f_{y_1}$
e_4		X	$\leftarrow f_{y_2}$

	f_{u_1}	f_{u_2}	f_{y_1}	f_{y_2}
r_1	X	X	X	0

$\Rightarrow$

	f_{u_1}	f_{u_2}	f_{y_1}	f_{y_2}
r_1	X	0	X	0

Redundans två $\Rightarrow$ kan inte skapa r_5 ($N_H = 0$).

Koppling isolerbarhet och känslighet

Sammanfattningsvis finns följande väntade resultat som kopplar ihop känslighet med detekterbarhet/isolerbarhet:

Teorem (Detekterbarhet och känslighet)

Fel f_i är detekterbart om och endast om det existerar en residualgenerator som är känslig för fel f_i.

Teorem (isolerbarhet och känslighet)

Fel f_i är isolerbar från f_j om och endast om det existerar en residualgenerator som avkopplar f_j och som är känslig för f_i.

Designprocedur

1. Beräkna detekterbarheten och isolerbarheten, som är lika med den maximala detekter- och isolerbarhetsprestandan för ett diagnossystem.
2. Ansätt en beslutstruktur så att:
   a) varje rad i beslutstrukturen kan realiseras enligt detekter- och isolerbarheten.
   b) diagnossystemets totala detekter- och isolerbarhetsprestanda blir den önskade.
3. Konstruera residualer genom att avkoppla fel enligt raderna på beslutsstrukturen.
4. Använd designfrihet i residualgeneratorerna för att få känslighet för alla fel som inte ska avkopplas enligt beslutsstrukturen. Vi ska studera detta steg härnäst.

I det olinjära fallet blir det ännu viktigare att kunna ansätta en bra beslutsstruktur, eftersom det kan krävas stora insatser att designa en residual. Analytiska metoder är begränsade i olinjära fall och strukturella analyser kan då användas för att analysera modellens detekter- och isolerbarhetsegenskaper.

Att ta med sig från föreläsningen

- Detekterbarhet är en modellegenskap som inte nödvändigtvis är samma som felkänsligheten i konstruerade residualer.
- Enkla detekterbarhets/isolerbarhets-test via matrisvillkor.
- Om de två designvariablerna kan grovt sägas:
  - $\gamma(s)$ Åstadkomma känslighet för önskade fel och forma överföringsfunktionen.
  - $d(s)$ Införa, till exempel, lågpass-verkan för att filtrera bort brus och förstärka fel/brus-förhållandet.
- Stark detekterbarhet = kan konstanta fel detekteras?

TSFS06 Diagnos och övervakning
Föreläsning 4 - Linjär residualgenerering och detekterbarhet

Erik Frisk

Institutionen för systemteknik
Linköpings universitet
erik.frisk@liu.se

2020-04-08